Introdução à Análise - Terceira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

April 12, 2016

- Nos exercícios abaixo indicados, (V, d) é um espaço métrico.

1. Assuma $A \subset B \subset V$. Prove que $A' \subset B'$.

2. Sejam $A, B \subset V$. Mostre que
$$A' \cup B' = (A \cup B)'.$$

3. Seja $E \subset V$. Mostre que E' é fechado.

4. Sejam $B_1, B_2, ...$ conjuntos em um espaço métrico (V, d).

   (a) Prove que se
   $$B_n = \cup_{i=1}^n B_i \text{ então } \overline{B}_n = \cup_{i=1}^n \overline{B}_i.$$

   (b) Prove que se
   $$B = \cup_{i=1}^\infty B_i \text{ então } \overline{B} \supset \cup_{i=1}^\infty \overline{B}_i.$$

5. Seja $E \subset V$. Relembramos que o interior de E, denotado por by E°, é definido como o conjunto de todos os pontos interiores de E.

   (a) Prove que E° é aberto.
   (b) Prove que E é aberto se, e somente se, $E = E^\circ$.
   (c) Prove que se $G \subset E$ e G é aberto, então $G \subset E^\circ$.
   (d) Prove que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.
   (e) Têm E e $\overline{E}$ sempre o mesmo interior? Em caso negativo, apresente um contra-exemplo.
   (f) Têm E e E^0 sempre o mesmo fecho? Em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

6. Prove que $\mathbb{Q}$, o conjunto racional tem interior vazio.

7. Prove que $\mathbb{I}$, o conjunto dos irracionais, tem interior vazio.

8. Prove que $\mathbb{I}$ é denso em $\mathbb{R}$.
   Hint: Prove que
   $$x \in \mathbb{I}', \ \forall x \in \mathbb{R},$$
   onde $\mathbb{I}'$ denota o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{I}$.

9. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ o conjunto
$$x + B = \{x + y \mid y \in B\}$$
é aberto

10. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ onde B é aberto. Mostre que

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A \text{ and } y \in B\},$$

é aberto.

11. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ o conjunto

$$x \cdot B = \{x \cdot y \mid y \in B\}$$

é aberto.

12. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$, mostre que

    (a)
    $$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$

    (b)
    $$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ,$$

    e dê um exemplo para o qual a inclusão é própria.

13. Seja (V, d) um espaço métrico, seja $A \subset V$ um conjunto aberto e seja $a \in A$. Mostre que $A \setminus \{a\}$ é aberto.

14. Sejam $A, B \subset V$, onde V é um espaço métrico. Prove que:

    (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

    (b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, e dê um exemplo no qual a última inclusão é própria.

15. Mostre que um conjunto A é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, X^c tem interior vazio.

16. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e seja $x \in F$. Mostre que x é um ponto isolado de F se, e somente se, $F \setminus \{x\}$ é fechado.

17. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A' também o é.

18. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ então $\overline{A} \setminus A'$ é enumerável.

19. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Assuma que $a_1, .., a_n \in A$.
    Prove que $A \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ é aberto.

20. Seja $A \subset V$ um conjunto aberto e $F \subset V$ um conjunto fechado.
    Mostre que $A \setminus F$ é aberto e $F \setminus A$ é fechado.

21. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-enumerável. Prove que $A \cap A' \neq \emptyset$.