Introdução à Análise - Quarta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

May 11, 2016

1. Calcule os limites abaixo indicados e prove formalmente o seu resultado.

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-9}{2-12n},$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{2-7n},$$

   (c)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+4\sqrt{n}},$$

   (d)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

   (e)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+10}-\sqrt{n},$$

   (f)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{11n-7}{3+12n},$$

2. Prove que
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$
   onde
   $$a_n = \frac{7^n}{n!}.$$
   Dica: Prove que
   $$0 < a_n < \frac{7^7}{7!}\frac{7}{n}, \text{ se } n > 7.$$

3. Prove que
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$
   onde
   $$a_n = n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Sejam $a, b > 0$ e seja
   $$c_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Mostre que
   $$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{a,b\}.$$

5. Sejam $a_1, .., a_k > 0$ e seja

$$c_n = \sqrt[n]{a_1^n + ... + a_k^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \max\{a_1, ..., a_k\}.$$

6. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_1 = 1$ e

$$x_{n+1} = 3 + \frac{3}{x_n + 10}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Mostre que existe $0 < c < 1$, tal que

   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   e conclua, justificando a sua resposta, que $\{x_n\}$ é convergente.

   (b) Calcule

   $$\lim_{n \to \infty} x_n.$$

7. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_1 = 1$ e

$$x_{n+1} = 3 + \frac{x_n}{15} + \frac{1}{x_n + 10}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Mostre que existe $0 < c < 1$, tal que

   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   e conclua, justificando a sua resposta, que $\{x_n\}$ é convergente.

   (b) Calcule

   $$\lim_{n \to \infty} x_n.$$

8. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ definida por $x_1 = \sqrt{2}$ e

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\{x_n\}$ é convergente e calcule o seu limite.
Dica: Primeiramente mostre por indução que $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

9. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ definida por $x_1 = \sqrt{a}$ onde $a > 0$ e

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\{x_n\}$ é convergente e calcule o seu limite.

10. Seja $\{a_n\}$ tal que $a_n > 0$ e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1.$$

Mostre que existe $0 < c < 1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n+1} < c a_n, \ \forall n > n_0.$$

Prove também que, em tal caso,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

11. Seja $a > 0$. Usando os resultados do último item, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = 0.$$

Usando os mesmos resultados, prove também que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

12. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq |a| < 1$. Utilizando os testes da razão ou da raiz, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a|^n$$

é convergente.

13. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries tais $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 5.$$

   (a) Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $b_n > 0$.
   (b) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

14. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries tais $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0, \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$

   (a) Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $a_n > 0$.
   (b) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

15. Seja $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ uma sequência decrescente. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Sob tais hipóteses, prove que

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0.$$

16. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente tal que $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Prove que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{N} = 0.$$

17. Seja $\{y_n\}$ tal que $y_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = +\infty.$$

Suponha também que $\{x_n\}$ é tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Prove que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

onde

$$c_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{y_1 + y_2 + ... + y_n}.$$