Introdução à Análise - Quinta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

June 19, 2016

1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = e^{1/x}.$$
Prove que
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
e
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}.$$
Prove que
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$
e
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1.$$

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x + \frac{x}{2}\sin(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Prove formalmente que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
e
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^2 + 10x\sin(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Prove formalmente que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
e
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + x^2 + 10x\sin(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prove formalmente que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

6. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona com $f(X) \subset [a, b]$. Prove que se $f(X)$ é denso em $[a, b]$, então para cada $c \in X'_+ \cap X'_-$ temos que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x).$$

Além disso, prove que se $c \in X$ então

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'$. Suponha que exista uma sequência $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n > a$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses, mostre que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Defina

$$A = \{c \in (a, b) \ :\ \lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)\}.$$

Prove que A é enumerável.

9. Prove que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

e que

$$\lim_{x\to0+} \ln(x) = -\infty.$$

Seja $a > 1$. Prove que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

10. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio real, isto é

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Assuma que $n \geq 1$ e $a_n > 0$. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} p(x) = +\infty,$$

e se n é par, então,

$$\lim_{n \to -\infty} p(x) = +\infty$$

e se n é impar, então

$$\lim_{n \to -\infty} p(x) = -\infty.$$

11. Determine o conjunto dos valores de aderência da função

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

no ponto $x = 0$, onde

$$f(x) = \frac{\sin(1/x)}{1 + e^{1/x}}.$$

12. Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos por $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a > 0$ e $b > 0$.

Prove que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0.$$

Mostre também que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a}$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = +\infty.$$

- Nos exercícios abaixo indicados, assuma sempre $X \subset \mathbb{R}$.

13. (Feito em sala) Seja f uma função limitada numa vizinhança V_δ de $a \in X'$. Prove que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então

$$l - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$$

onde

$$l = \liminf_{x \to a} f(x)$$

and

$$L = \limsup_{x \to a} f(x).$$

14. Seja f uma função limitada em uma vizinhaça V_δ de $a \in X'$. Prove que

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe se, e somente se, f tem um único valor de aderência em a.

15. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas numa vizinhança de $a \in X'$. Mostre que:

(a)

$$\limsup_{x \to a}(f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x),$$

(b)

$$\liminf_{x \to a}(f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x),$$

(c)

$$\limsup_{x \to a}[-f(x)] = -\liminf_{x \to a} f(x),$$

(d)

$$\liminf_{x \to a}[-f(x)] = -\limsup_{x \to a} f(x).$$

16. (Feito em sala) Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Suponha que

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x+1) - f(x)) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha.$$