Introdução à Análise - Sexta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

July 13, 2016

1. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

   Defina
$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = g(x)\}.$$
   Mostre que A é fechado.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

   Defina
$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq g(x)\}.$$
   Mostre que A é fechado.

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $c \in \mathbb{R}$.

   Defina
$$A = \{x \in X \ : \ f(x) < c\}.$$
   Mostre que A é aberto.

4. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

   Defina
$$A = \{x \in X \ : \ f(x) < g(x)\}.$$
   Mostre que A é aberto.

5. (Feito em sala) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto.

   Mostre que $f^{-1}(B)$ é aberto, onde
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}.$$

6. (Feito em sala) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.

   Assuma que $f^{-1}(B)$ é aberto, para todo $B \subset \mathbb{R}$ aberto.

   Prove que f é continua em X.

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado.

   Mostre que $f^{-1}(F)$ é fechado.

8. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado.

   Mostre que existe $F_1 \subset \mathbb{R}$ fechado tal que $f^{-1}(F) = F_1 \cap X$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Assuma que para todo $A \subset \mathbb{R}$ aberto, tenhamos $f(A)$ aberto. Mostre que f é injetiva.

11. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que f é contínua se e somente, $f^{-1}(F)$ é fechado para cada $F \subset \mathbb{R}$ fechado.

12. (Feito em sala) Seja $Z \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$f(x) = \inf\{|x - z| \ :\ z \in Z\}.$$
Mostre que
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Conclua, justificando sua resposta, que f é uniformemente contínua $\mathbb{R}$.

13. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções uniformente contínuas em X. Mostre que
$$(\alpha f + \beta g) : X \to \mathbb{R}$$
é uniformemente contínua em X, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onde
$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),\ \forall x \in X.$$

14. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas em X. Mostre que $h : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, onde
   (a)
   $$h(x) = |f(x) + g(x)|, \forall x \in X,$$
   (b)
   $$h(x) = \gamma f(x) + |\alpha f(x) - \beta g(x)|, \forall x \in X, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$
   (c)
   $$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \forall x \in X,$$
   Dica: $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
   (d)
   $$h(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \forall x \in X.$$
   Dica: $\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

15. Seja $a > 0$. Mostre que a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é Lipschitziana em $[a, +\infty)$, com constante de Lipschitz $c = 1/(n\sqrt[n]{a^{n-1}})$. Mostre também que f é uniformente contínua em $[0, +a]$. Conclua, justificando a sua resposta, que f é uniformemente contínua em $[0, +\infty)$.

16. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que para que f se estenda cuntinuamente a uma função $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$, é necessário e suficiente que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ para cada $a \in X'$.

17. (Questão retificada) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Mostre que existe uma partição $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, .., x_n = b\}$ de $[a, b]$ onde $x_{i-1} < x_i, \forall i \in \{1, \cdots n\}$ tal que se $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Com tal resultado, conclua que existe uma função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que a restrição de $\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$ seja um polinômio de grau menor ou igual a um (segmento de reta sobre $[x_{i-1}, x_i]$), $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, e tal que
$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$