PAM - H - Cálculo 3
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

February 26, 2018

1. Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $A' \subset B'$.

2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Prove que
$$A' \cup B' = (A \cup B)'.$$

3. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que E' é fechado.

4. Sejam $B_1, B_2, ...$ subconjuntos do $\mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que se
   $$B_m = \cup_{i=1}^m B_i, \text{ então } \overline{B}_m = \cup_{i=1}^m \overline{B}_i.$$

   (b) Mostre que se
   $$B = \cup_{i=1}^\infty B_i, \text{ então } \overline{B} \supset \cup_{i=1}^\infty \overline{B}_i.$$

5. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Relembramos que o interior de E, denotado por E°, é definido como o conjunto de todos os pontos interiores de E.

   (a) Mostre que E° é aberto.

   (b) Mostre que E é aberto se, e somente se, $E = E^\circ$.

   (c) Mostre que se $G \subset E$ e G é aberto, então $G \subset E^\circ$.

   (d) Prove que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

   (e) Têm E e $\overline{E}$ sempre o mesmo interior? Se não, apresente um contra-exemplo.

   (f) Têm E e E^0 sempre o mesmo fecho? Se não, apresente um contar-exemplo.

6. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\mathbf{x} + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in B\}$$
é aberto.

7. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Mostre que

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \; : \; \mathbf{x} \in A \text{ e } \mathbf{y} \in B\},$$

é aberto.

8. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$. Mostre que

$$x \cdot B = \{x \cdot y \mid y \in B\}$$

é aberto.

9. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que

   (a)
   $$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$

   (b)
   $$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ,$$

   e dê um exemplo no qual a inclusão é própria.

10. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um cojunto aberto e seja $\mathbf{a} \in A$. Prove que $A \setminus \{\mathbf{a}\}$ é aberto.

11. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Prove que:

    (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

    (b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, e de um exemplo no qual a inclusão é própria.

12. Mostre que A é denso em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, A^c tem interior vazio.

13. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e seja $\mathbf{x} \in F$. Mostre que $\mathbf{x}$ é um ponto isolado de F se, e somente se, $F \setminus \{\mathbf{x}\}$ é fechado.

14. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Assuma $\mathbf{a}_1, .., \mathbf{a}_n \in A$.

    Prove que $A \setminus \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ é aberto.

15. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado.

    Mostre que $A \setminus F$ é aberto e $F \setminus A$ é fechado.