

PAM - H - Cálculo 3

Terceira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

March 14, 2018

1. Mediante a definição de derivada parcial, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $3x + 2y > 0$, calcule

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

onde

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3x + 2y}}.$$

2. Mediante a definição de derivada parcial, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 - y \neq 0$, calcule

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

onde

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y}.$$

3. Utilizando a definição de diferenciabilidade, prove que as funções abaixo indicadas são diferenciáveis nos respectivos domínios:

(a) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$,

(b) $f(x, y) = 2xy^2 - 3xy$,

(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prove que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prove que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem e que f é diferenciável em $(0, 0)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Obtenha $\Delta f(0, 0, \Delta x, \Delta y)$.

(b) Calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

(c) Mediante a definição de diferenciabilidade, prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

9. Para as funções abaixo indicadas, obtenha os respectivos domínios e utilizando as condições suficientes vistas em aula, prove que as mesmas são diferenciáveis (nos domínios em questão):

(a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+5y}$

(b) $f(x, y) = y \ln x - x/y$,

(c) $f(x, y) = \arctan(x^2 - y) + \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$,

10. Para as funções abaixo indicadas, calcule o diferencial total dw , onde

(a) $w = \ln(x^2 + y^2 + e^{z^2})$,

(b) $w = \frac{e^{x^2yz}}{x^2+y^2+z^3}$,

(c) $w = \cos^3(\sqrt{x^2 + y^2})e^{x^2+y^5}$.

11. Use o conceito de diferencial total para estimar o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $6m$ e $8m$ e cujo possível erro em cada medida é de $0.1m$. Calcule também o erro percentual aproximado.
12. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Suponha que todas as derivadas parciais de f sejam zero em todos os pontos de D . Prove que f é constante em D .
13. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo aberto e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Assuma que f possui derivadas parciais em todos os pontos de D . Sejam (x, y) e $(x + u, y + v) \in D$.
Prove the existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x + u, y + v) - f(x, y) = f_x(x + \lambda u, y + v)u + f_y(x, y + \lambda v)v.$$

14. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e convexo e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que exista $K > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq K, \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Prove que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq Kn|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

15. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in D$. Prove que existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que se $|\mathbf{h}| < \delta$ então $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D$ e

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)| < K|\mathbf{h}|.$$

16. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Calcule

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$