

PAM - H - Cálculo - 3

Quarta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

April 4, 2018

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, t) = \frac{t^2 + y}{e^t + x^2 + t^2}.$$

Suponha que as funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam dadas por

$$x(t) = \cos^2(t^3),$$

e

$$y(t) = e^{t^2}.$$

Utilizando a regra da cadeia, calcule $g'(t)$ onde $g(t) = f(x(t), y(t), t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de g nos pontos $t = 0$ e $t = \pi$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + xy}{z^2 + e^x + \cos^2(y)}.$$

Seja $z(x, y) = \cos^2(x^2 + y^2)$ e defina $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x, y) = g(x, y, z(x, y)).$$

Utilize a regra da cadeia para calcular $h_x(x, y)$ e $h_y(x, y)$.

Obtenha a equação da reta normal e do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1, 0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $u(x, y) = bx - ay$. Mostre que $z(x, y) = f(u(x, y))$ satisfaz à equação:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Denotando $u(r, \theta) = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

5. Considere o plano $\pi : 2x + 3y + z = 2$. Obtenha o ponto de π mais próximo do ponto $P(1, 1, 0)$.

Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

6. Considere o elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde $a, b, c > 0$.

Obtenha os pontos de tal superfície que estão mais próximos da origem $(0, 0, 0)$.

7. Seja A uma matriz real $m \times n$. Seja $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(\mathbf{x}) = \langle (A\mathbf{x}), \mathbf{y}_0 \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ denota o produto escalar usual no \mathbb{R}^m . Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtenha os pontos de mínimo e máximo de $f(\mathbf{x})$ sob a restrição $|\mathbf{x}| = 1$.

8. Obtenha três números reais positivos cuja soma seja 30 e cujo produto entre eles é máximo.

Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

9. Obtenha três números reais positivos cujo produto seja 30 e cuja soma entre eles é mínima.

Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

10. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser convexa se

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1].$$

(a) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável. Mostre que f é convexa se, e somente se,

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Prove que se f é convexa, diferenciável e $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ então $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global para f .

11. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que

$$H(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$$

é uma matriz positiva definida, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que f é convexa no \mathbb{R}^n .

12. Sejam $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $p > 0$ e $q > 0$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Prove que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Sugestão: Fixe $y \geq 0$. Calcule o ponto de mínimo global de

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy,$$

em $[0, +\infty)$.

Observe que f é convexa em $[0, \infty)$ assim o único ponto de extremo será um mínimo global.

13. Sejam $F, G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $F(x, y, u, v) = x^2 + y^3 - u + v^2$ e $G(x, y, u, v) = e^{2x} + e^{3y} + 2uv + 3v^2$. Assumindo as hipóteses do teorema da função implícita para funções vetoriais, considere as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas implicitamente numa vizinhança de um ponto $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad e \quad G(x, y, u, v) = 0.$$

Obtenha u_x , u_y , v_x e v_y .

14. Obtenha a equação do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P(1, 1, 2)$, onde $z = f(x, y)$ é definida implicitamente mediante à equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z - 12 = 0.$$

15. Considere as superfícies S_1 e S_2 de equações

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2 = 0.$$

Considere o ponto $P(2, 2, 1)$ na intersecção entre S_1 e S_2 .

- (a) Obtenha a equação da reta tangente à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.
- (b) Obtenha a equação do plano normal à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.

16. Determine os pontos críticos de $z = f(x, y)$ definida implicitamente mediante à equação:

$$F(x, y, z) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - z^2 = 0.$$