PAM - H - Cálculo - 3 - Quinta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

May 9, 2018

1. Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto não-vazio e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0, \text{ se } x_j \in \mathbb{Q}, \ \forall j \in \{1, .., n\}, \\ 1, \text{ se } x_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ para algum } j \in \{1, ..n\}. \end{cases}$$

   Mostre que f não é integravel à Riemann sobre B_0.

2. Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto não-vazio. Defina $A = \{x_1, ..., x_k\} \subset B_0$ e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathbf{x} \in A, \\ 1, \text{ se } \mathbf{x} \in B_0 \setminus A \end{cases}$$

   Mostre que f é integrável à Riemann em B_0 e calcule

$$\int_{B_0} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

3. Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto não-vazio. Seja $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_0$ uma sequência tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

   Defina $B = A \cup \{x_0\}$ e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathbf{x} \in B, \\ 1, \text{ se } \mathbf{x} \in B_0 \setminus B \end{cases}$$

   Mostre que f é integrável à Riemann em B_0 e calcule

$$\int_{B_0} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

4. Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja $I_1 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_0 de B_0 tal que

$$|S_f^P - I_1| < \varepsilon,$$

   para toda partição P tal que $P_0 \subset P$.

   Mostre que

$$I_1 = \overline{I},$$

   onde $\overline{I}$ denota a integral superior de f em B_0.

5. Sejam $A, B_0 \subset \mathbb{R}^n$ blocos. Suponha que $A \subset B_0$ e que f é integrável à Riemann em B_0.

   Prove que a restrição de f em A, denotada por $f|_A$, é integrável à Riemann em A.

6. Seja B_0 um bloco compacto e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann em B_0.
   Mostre que o conjunto
   $$G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in B_0\},$$
   tem medida zero em $\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Seja B_0 um bloco compacto. Motre que toda função $f : B_0 \to \mathbb{R}$ integrável à Riemann pode ser escrita como a diferença entre duas funções não-negativas integráveis à Riemann.

8. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo por caminhos. Mais especificamente, assuma que para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ existe uma função contínua suave por partes tal que $r : [a, b] \to D$ e tal que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{A}$, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{B}$. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua em D. Seja $\gamma \in [\alpha, \beta]$, onde
   $$\alpha = \min\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in D\}$$
   e
   $$\beta = \max\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in D\}.$$
   Prove que existe $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que
   $$f(\mathbf{x}_0) = \gamma.$$

9. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua em D onde tal conjunto é compacto e conexo por caminhos, conforme especificado no exercício anterior. Suponha que ∂D é de classe C^1. Mostre que existe $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que
   $$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \, Vol(D).$$

10. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua onde D é um conjunto aberto. Seja $\mathbf{x}_0 \in D$. Mostre que
   $$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{Vol(B_r(\mathbf{x}_0))} = f(\mathbf{x}_0).$$