PAM - H - Cálculo - 3
Oitava Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

June 1, 2018

1. Seja $A, B \subset \mathbb{R}^n$ blocos compactos e não-vazios. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções limitadas e não negativas. Defina $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$ por
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}).$$
Prove que
$$\overline{\int}_{A\times B} \varphi(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \overline{\int}_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \cdot \overline{\int}_B g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e não-vazio tal que $m(\partial D) = 0$.
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann. Prove que
$$\left(\int_D f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right)^2 \leq \int_D f(\mathbf{x})^2\, d\mathbf{x} \cdot \int_D g(\mathbf{x})^2\, d\mathbf{x}.$$

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto e não-vazio. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função tal que
$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq M, \forall \mathbf{x} \in A.$$
Considere o conjunto
$$C(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in A \times [0, M] \ : \ 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\}.$$
Mostre que
$$\overline{\int}_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \overline{\int}_{A\times M} \chi_{C(f)}(\mathbf{x}, y)\, d\mathbf{x}\, dy,$$
onde
$$\chi_{C(f)}(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (\mathbf{x}, y) \in C(f) \\ 0, & \text{se } (\mathbf{x}, y) \notin C(f). \end{cases} \tag{1}$$
Estabeleça o resultado análogo para a integral inferior e conclua, justificando a sua resposta, que uma condição necessária e suficiente para a integrabilidade de f é que $m(\partial C(f)) = 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Para $a > 0$ seja $B_n(a)$ o volume da região
$$\{(x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq a\}.$$
   (a) Prove que
$$B_n(a) = a^n B_n(1).$$

(b) Prove que

$$B_n(1) = \frac{2}{n} B_{n-1}(1).$$

Sugestão: Observe que

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1, \text{ se e somente se, } |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| \leq 1 - |x_n| \text{ e } |x_n| \leq 1\}.$$

Logo

$$B_n(1) = \int_{-1}^{1} \left(\int \cdots \int_{|x_1|+\cdots+|x_{n-1}| \leq 1 - |x_n|} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

(c) Prove que

$$B_n(1) = \frac{2^n}{n!}$$

e que

$$\lim_{n \to \infty} B_n(1) = 0.$$

5. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região simples. Sejam $u, v \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$. Prove que

$$\int\int_D uv_x \, dxdy = \int_{\partial D} uv \, dy - \int\int_D u_x v \, dxdy,$$

e

$$\int\int_D uv_y \, dxdy = \int_{\partial D} uv \, dx - \int\int_D u_y v \, dxdy,$$

6. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região aberta limitada por uma superfície de classe C^1 fechada. Utilize a primeira identidade de Green para provar a unicidade da solução do problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{em } V \\ u = u_0, & \text{em } \partial V, \end{cases} \tag{2}$$

onde $f : V \to \mathbb{R}$ é contínua e $u_0 : \partial V \to \mathbb{R}$ é contínua.

Também utilizando a primeira identidade de Green, prove que:

(a) para o prolema de Neumann

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{em } V \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_0, & \text{em } \partial V, \end{cases} \tag{3}$$

ter uma solução, é necessário que

$$\int\int\int_V f \, dxdydz = \int\int_{\partial V} u_0 \, dS.$$

Sugestão: considere $v \equiv 1$ apropriadamente na primeira identidade de Green.

(b) Prove que duas soluções quaisquer do problema de Neumann diferem por uma constante.