

## 4 Funções



## 4 Funções

- 1) *Estudar o conceito de função: definição, nomenclatura e gráficos.*
- 2) *Estudar as propriedades das funções (função injetora, sobrejetora, bijetora, par e ímpar).*
- 3) *Estudar a composição de funções e a função inversa.*

### Introdução

Neste capítulo vamos estudar as funções, um dos conceitos mais importantes da matemática, que estará presente ao longo de todo o curso, nas mais variadas disciplinas. Os conceitos trabalhados nos capítulos 1, 2 e 3 serão amplamente utilizados em nosso estudo das funções. Uma **função** é uma **relação** especial entre dois **conjuntos**. Estudaremos as funções reais, que estabelecem relações no conjunto dos **números reais**.

A idéia de função aparece pela primeira vez com os babilônios, cerca de 2000 a.C. Eles utilizavam tabelas como a descrita abaixo, associando a cada número inteiro maior do que ou igual a zero o seu quadrado.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n <sup>2</sup>	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

**René Descartes** (1596 – 1650) pode ter sido o primeiro matemático a usar o termo “função” (1637): para ele, função significava uma potência de  $x$ , como  $x^2$ ,  $x^3$ , etc. Em 1692, **Gottfried Wilhelm Leibniz** chamava função qualquer quantidade associada a uma curva. **Johann Bernoulli** em 1718 definiu função como sendo qualquer expressão envolvendo uma variável e quaisquer constantes. A notação  $f(x)$  foi introduzida por volta de 1750 por **Leonhard Euler**; segundo ele, uma função não precisava ter uma expressão analítica,

podendo ser representada por uma curva. Já no início do século XIX, **Joseph Louis Lagrange** restringia o significado de função a uma representação em série de potência. Mais recentemente (final do século XIX), o estudo de conjuntos feito por **George Cantor** e outros matemáticos levou à definição de função como a conhecemos hoje: um conjunto especial de pares ordenados de elementos, não necessariamente números. Todo o Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por **Isaac Newton** e Leibniz no século XVII e aperfeiçoado ao longo dos séculos por vários matemáticos gira em torno de dois conceitos fundamentais: o conceito de função e o conceito de limite. Antes da definição formal, vejamos:

## 4.1 Exemplos de situações que envolvem a idéia de Função

- 1) Galileu (1564 – 1642) descobriu que o espaço percorrido por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo. Mais precisamente, se o corpo é abandonado na posição de repouso, no tempo  $t = 0$ , sendo  $t$  medido em segundos, então o espaço percorrido pelo corpo em  $t$  segundos é dado por  $x = \frac{g \cdot t^2}{2}$  em que  $g$  é a aceleração da gravidade ( $g$  é aproximadamente  $9,8m/s^2$ ) e  $x$  é medido em metros. Desta forma o espaço percorrido  $x$  depende do tempo da queda  $t$ . Diz-se que  $x$  é uma função de  $t$ . Além disso, diz-se que  $t$  é a variável independente e  $x$  é a variável dependente desta função.
- 2) A área de um círculo de raio  $r$  é dada por  $A = \pi r^2$ . Esta área depende do raio  $r$ ; em outras palavras, a área  $A$  é uma função de  $r$ , sendo  $A$  a variável dependente e  $r$  a variável independente.
- 3) O volume de um paralelepípedo cujos lados medem  $x$ ,  $y$  e  $z$  é expresso por  $V = x \cdot y \cdot z$ . Este volume é uma função das dimensões  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sendo estas as variáveis independentes da função volume, enquanto o volume  $V$  é a variável dependente.
- 4) Um micro empresário supõe que o custo de produção de certo artigo depende:
  - 1º) do material utilizado para a confecção ( $m$ );

- 2º) da mão-de-obra ( $mo$ );
- 3º) do custo do equipamento utilizado ( $e$ );
- 4º) da administração ( $a$ );
- 5º) da manutenção do equipamento ( $me$ ).

Neste caso, o custo do produto é uma função destas cinco variáveis:  $C = f(m, mo, e, a, me)$ .

Mas afinal, o que é uma função?

Retomando o exemplo 1) da queda dos corpos, suponhamos que o tempo necessário para a ocorrência do fenômeno físico descrito, isto é, o tempo de queda do corpo seja 10 segundos. Então, a cada instante  $t$ , entre 0 e 10 segundos, corresponde um único valor de  $x$ , que é a distância do corpo à posição inicial. Este valor de  $x$  é dado por  $x = \frac{g \cdot t^2}{2}$ . Por exemplo, para  $t = 5$  (e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ), o valor de  $x$  é dado por  $x = \frac{(9,8) \cdot 5^2}{2} = \frac{245}{2} = 122,5 \text{ m}$ . Assim, temos um tipo especial de relação que é denominado função.

Mais precisamente:

*Definição.* Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não-vazios. Uma função de  $A$  em  $B$  é uma relação  $f$  que a cada elemento de  $A$  associa um único elemento de  $B$ .

*Notação:*  $f : A \rightarrow B$  (lê-se "f de A em B")  
 $x \mapsto y$  (lê-se "x é levado em y")

**Observação 1.** Pelo fato do elemento  $y$  estar associado a  $x$ , escrevemos também " $y = f(x)$ ". Esta é a notação mais utilizada de função, apesar de não indicar os conjuntos.

**Observação 2.** Como  $f$  é uma relação de  $A$  em  $B$ , lembremos que o conjunto  $A$  é chamado o domínio da função e o conjunto  $B$  é o contradomínio. O conjunto dos elementos de  $B$  que estão associados a algum elemento de  $A$  é a imagem da função  $f$ ;  $x \in A$  é chamado "variável independente" e  $y \in B$  é chamado "variável dependente".

Notações:

- O Domínio de  $f$  será denotado  $D(f)$
- A Imagem de  $f$  será denotada  $Im(f)$

**Observação 3.** A imagem de  $f$  é o conjunto

$$Im(f) = \{b \in B / b = f(a), \text{ para algum } a \in A\}$$

Nos textos didáticos é comum encontrarmos a expressão “ $f(a)$  é a imagem de  $a$ ”. Neste caso,  $f(a)$  é a imagem do elemento  $a$  e não a imagem da função  $f$ , que é um conjunto.

**Observação 4.** Se o contradomínio de uma função  $f$  é o conjunto  $\mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é uma função real. Além disso, se o domínio da função  $f$  é também um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , isto é,  $D(f) \subset \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é uma função real de variável real. Estas funções serão objeto de estudo no próximo capítulo.

**Observação 5.** Frequentemente, mas nem sempre, a regra que define  $y$  como função de  $x$  é dada por uma expressão analítica, como  $y = 4x - 3$ ,  $y = \log x$  etc. No entanto, a função pode estar perfeitamente definida sem que tenhamos uma “fórmula” explícita. Atenção para os exemplos, mais adiante.

**Observação 6.** Para caracterizar uma função não basta somente a lei que a cada elemento do domínio associa um elemento no contradomínio. É preciso, além disso, estar claro quais são estes conjuntos. Quando não se faz referência ao domínio da função, entende-se que é o conjunto de todos os elementos para os quais a expressão que define a função faz sentido.

**Observação 7.** De modo geral, usaremos letras minúsculas para denotar funções e variáveis. Por exemplo, se escrevermos  $k(t)$ , estamos nos referindo à função  $k$  de variável independente  $t$ . A variável dependente também será denotada por letras minúsculas. A respeito destas notações, lembramos que o uso da letra  $f$  para denotar a função,  $x$  para a variável independente e  $y$  para a variável dependente não é obrigatório, apesar de consagrado nos livros didáticos.

## Exemplos

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$

$f$  é a função que a cada número real associa seu triplo somado com 5. O domínio da função é o conjunto  $\mathbb{R}$  e o contradomínio é  $\mathbb{R}$ . A imagem da função é o conjunto de valores reais resultantes das operações "o triplo do número mais 5". Assim,  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = 3x + 5 \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$ .

Veja alguns valores do conjunto imagem:

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$f(0,0004) = 3 \cdot 0,0004 + 5 = 5,0012$$

$$f(\sqrt{7}) = 3 \cdot \sqrt{7} + 5 = 3\sqrt{7} + 5$$

**Pergunta:** existe um número real  $k$  tal que  $f(k) = 51$ ? Em outras palavras: 51 é a imagem de algum elemento do domínio?

Para responder a pergunta, façamos  $f(k) = 51$ , ou seja,  $3k + 5 = 51$ . Resolvendo a equação, vemos que para  $k = \frac{46}{3}$  temos  $f\left(\frac{46}{3}\right) = 51$ . Observe que para qualquer número real  $y$  é sempre possível encontrar um número real  $x$  tal que  $f(x) = y$ .

De fato:

$$3x + 5 = y$$

$$3x = y - 5$$

$$x = \frac{y - 5}{3}$$

Para este  $x$ , tem-se

$$f(x) = f\left(\frac{y - 5}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{y - 5}{3}\right) + 5 = y - 5 + 5 = y.$$

Isto significa que todo número real é imagem de um elemento do domínio da função. Provamos assim que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ , ou seja, a imagem é o próprio contradomínio.

$$2) h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, h(n) = n^2 + 1$$

$h$  é a função que a cada número natural associa seu quadrado somado com 1. O domínio de  $h$  é o conjunto  $\mathbb{N}$  e o contradomínio é  $\mathbb{R}$ . A imagem de  $h$  é o conjunto  $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} / y = n^2 + 1, \text{ para } n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$

Note que neste caso a imagem da função  $h$  é um subconjunto próprio do contradomínio.

$$3) g(z) = \frac{1}{z}$$

$g$  é a função que a cada número real associa o seu inverso. Como só existem os inversos de números não-nulos, o domínio de  $g$  é o "maior" conjunto no qual é possível obter o inverso de um número,  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ . A imagem de  $g$  é o conjunto

$$\text{Im}(g) = \left\{ \frac{1}{z} / z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Pergunta: dado um número real  $y$ , é possível encontrar um número real não-nulo  $z$  tal que  $g(z) = y$ ?

Análogo ao que foi feito no exemplo 1, se  $y$  é tal que  $\frac{1}{z} = y$  para  $z \neq 0$ , então  $y \neq 0$  e  $z = \frac{1}{y}$  (basta multiplicar ambos os membros da igualdade  $\frac{1}{z} = y$  por  $zy^{-1}$ ). Assim,  $g(z) = g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$  e teremos  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^*$ .

$$4) t(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

Para determinar o domínio de  $t$ , devemos observar os valores reais para os quais é possível encontrar  $\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1}$ . Como não existem números com denominadores zero, devemos excluir os valores que anulam o denominador:  $s = -3$  e  $s = 1$ . Assim,  $D(t) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$ .

Qual é a imagem da função  $t$ ?

$$5) k(t) = \frac{1}{t^2 - 2t - 15}$$

Análogo ao exemplo anterior, para determinar o domínio de  $k$ , devemos observar os valores  $t$  para os quais é possível encontrar  $\frac{1}{t^2 - 2t - 15}$ . Fazendo  $t^2 - 2t - 15 = 0$ , obtemos  $t = 5$  ou  $t = -3$ : estes valores anulam o denominador e devem ser excluídos. Assim,  $D(k) = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$ .

$$6) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A função  $f$  é dada por duas sentenças: para os valores  $x$  menores ou iguais a 0, associa-se  $x+3$ ; para valores  $x$  maiores do que zero, associa-se  $x^2 - 4x + 3$ . O domínio da função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem é o conjunto

$$\text{Im}(f) = \{x+3/x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 0\} \cup \{x^2 - 4x + 3/x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}.$$

7) Para  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi(n)$  é a quantidade de números relativamente primos com  $n$  e menores do que  $n$  (função de Euler).

Este é um exemplo de função que não está expresso por uma "fórmula". Apesar disso, conhecemos a maneira de associar os elementos de  $\mathbb{N}^*$  com elementos de  $\mathbb{N}$ . Por exemplo:  $\varphi(6) = 2$ , pois são dois os números relativamente primos com 6 e menores do que 6: 1 e 5.

Analogamente,  $\varphi(19) = 18$ ,  $\varphi(42) = 12$  etc. Para a função de Euler temos:  $D(\varphi) = \mathbb{N}^*$  e  $\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(n) / n \in \mathbb{N}^*\}$ .

Para calcular  $\varphi(n)$ , usamos a decomposição de  $n$  em fatores primos (teorema fundamental da aritmética):

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , com  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  primos distintos e  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  para todo  $i$  e fazemos

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= (p_1^{\alpha_1-1})(p_1-1) \cdot (p_2^{\alpha_2-1})(p_2-1) \cdot (p_3^{\alpha_3-1})(p_3-1) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k-1})(p_k-1)$$

Por exemplo, para  $n = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ , temos que a quantidade de números relativamente primos com 504 e menores do que 504 é:

$$\varphi(504) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(7) = 2^2 \cdot (2-1) \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot (7-1) = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$$

$$8) h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

A função  $h$ , dada por duas sentenças, associa 1 aos números racionais e 0 aos números irracionais. Seu domínio é  $\mathbb{R}$  e sua imagem é  $\text{Im}(h) = \{0, 1\}$ .

**Observação 8.** Voltaremos a falar do conjunto-imagem de uma função quando estudarmos os gráficos de funções.

## 4.2 Igualdade de funções

Quando duas funções são iguais? Serão iguais as funções  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = x - 1$  e  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ?

**Teorema.** Duas funções  $f$  e  $g$  são iguais se e somente se

- i)  $f$  e  $g$  têm o mesmo domínio e
- ii)  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  do domínio de  $f$ .

O teorema responde a nossa pergunta inicial: o domínio da função  $f$  é  $\mathbb{R}$  e o domínio da função  $g$  é  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ; logo, as funções não são iguais, pois a condição (i) não é satisfeita. É tentador cancelar  $x + 1$  na expressão da função  $g$ . Mas lembre-se que somente podemos cancelar expressões seguramente não-nulas, ou seja,  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$  somente ocorre para  $x \neq -1$ . Lembre-se também que não basta a lei para caracterizar uma função.

- **Outros exemplos de funções**

Nos próximos exemplos alguns conceitos estão expressos em forma de função: as operações, o determinante de uma matriz, as projeções, a distância. Estas funções serão estudadas com mais detalhes em disciplinas posteriores. Observe que na maioria dos exemplos o domínio ou o contradomínio, ou ambos, são produtos cartesianos, o que caracteriza as funções de mais de uma variável.

- 9)  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a(x, y) = x + y$  (operação adição em  $\mathbb{R}$ )  
 $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, m(x, y) = x \cdot y$  (operação multiplicação em  $\mathbb{R}$ )
- 10) Seja  $M$  o conjunto das matrizes quadradas  $3 \times 3$ .  
 $k : M \rightarrow \mathbb{R}, k(A) = \det(A)$
- 11)  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, F(x, y) = (x, 0)$  (projeção na primeira coordenada)
- 12)  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, G(x) = (0, x)$  (inclusão)
- 13)  $K : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 $K((x, y), (u, v)) = (x + u, y + v)$  (adição de vetores)
- 14)  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$  (distância entre dois pontos na reta)
- 15)  $d : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, d((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$   
(distância entre dois pontos no plano)
- 16) Seja  $A$  um conjunto não-vazio e  $P(A)$  o conjunto das partes de  $A$ .  
 $h : P(A) \times P(A) \rightarrow P(A), h(X, Y) = X \cap Y$  (intersecção de conjuntos).

## Exercícios propostos

**1)** Dada a função  $f(x) = \frac{4x-3}{5x+6}$ , determine:

- a) o domínio de  $f$
- b)  $f(2x)$  e  $f(-2x)$
- c)  $f(-1)$
- d)  $f(2x + 1)$
- e)  $x$  tal que  $f(x) = 9$
- f)  $f(2x) + 1$

**2)** Determine o domínio das funções:

a)  $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{x}$

b)  $m(x) = \frac{2}{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} - \sqrt[3]{x-5}$

c)  $F(x) = x\sqrt[4]{x^2-40} + \frac{3x^5-2}{2\sqrt{6-x^2}}$

**3)** Dê dois exemplos de relações em  $\mathbb{R}$  que não são funções.

**4)** Seja  $g(t) = \frac{1+t}{1-t}$ . Determine  $g\left(\frac{1}{1+t}\right)$  e  $g\left(\frac{1}{1-t}\right)$ .

### 4.3 Gráfico de uma função

O gráfico é o “retrato” de uma função. Facilita, entre outras coisas, a análise de relatórios ou perspectivas econômicas, cotação de moedas, pesquisas estatísticas etc. O gráfico permite visualizar melhor o comportamento da função, seu crescimento e seus máximos e mínimos.

Nosso estudo aqui se restringe às funções reais de uma variável real, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e cujo contradomínio é  $\mathbb{R}$ . Como uma função é uma relação especial, podemos aproveitar a idéia dos gráficos de relações já estudados; o gráfico de uma função é, em geral, uma curva ou reunião de partes de curvas, ou de pontos, representados no plano cartesiano. A variável independente é em geral marcada sobre o eixo horizontal (eixo das abscissas) e a variável dependente é marcada sobre o eixo vertical (eixo das ordenadas).

**Definição.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. O gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são  $(x, f(x))$ , com  $x \in A$ .

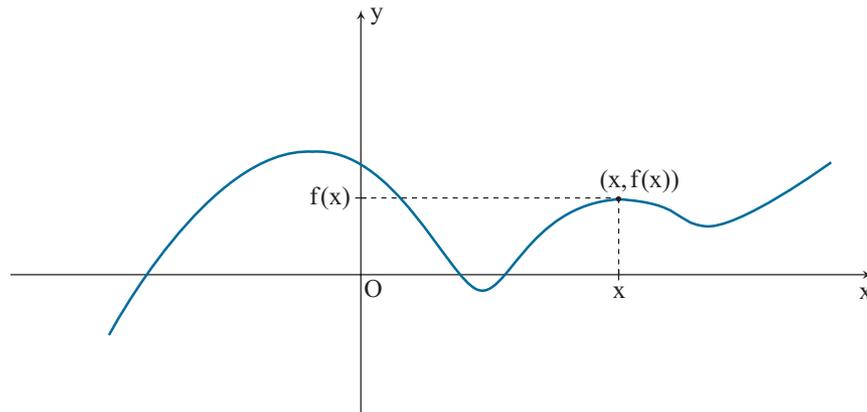


Figura 4.1

Simbolicamente

$$Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\} = \{(x, f(x)) / x \in A\}$$

**Observação 9.** O gráfico é uma representação da função por desenho ou figura geométrica, mediante a associação, um a um, dos pares ordenados de números reais com pontos de um plano, usando um sistema de eixos coordenados (como foi feito para números reais e pontos de uma reta).

## Exemplos

17) Seja  $A = \{n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq 5\}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n - 1$

Como  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , é possível determinar todos os valores  $f(n)$  e o gráfico é  $Gr(f) = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

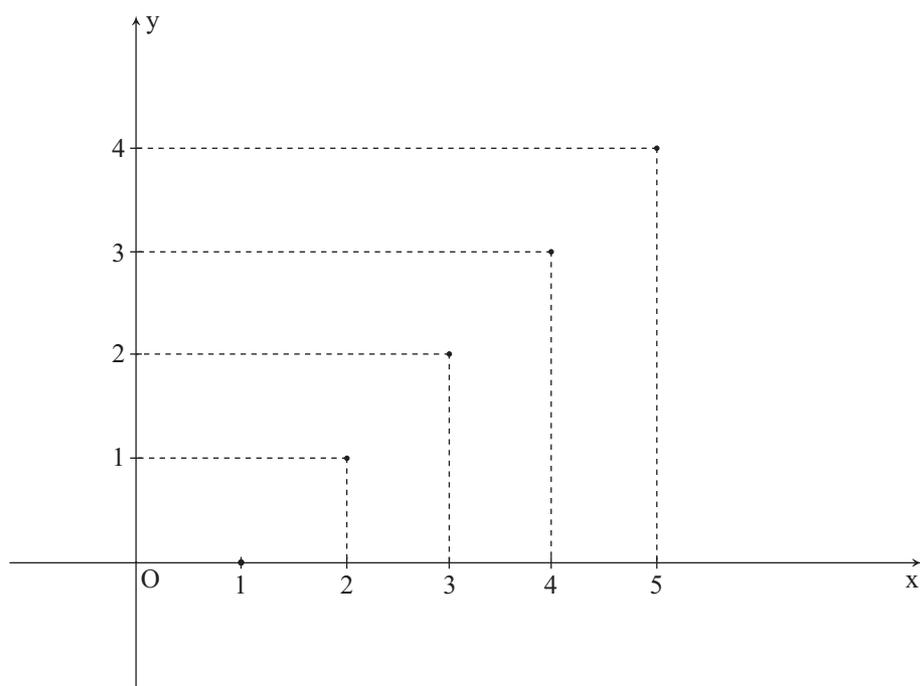


Figura 4.2

$x$	$y = f(x)$
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

18)  $f : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$

Neste caso não é possível fazer uma tabela para todos os valores de  $x$  em  $[0,3]$ . Mostraremos mais adiante que esta função tem um gráfico que é um segmento de reta. Assim, basta conhecer dois de seus pontos.

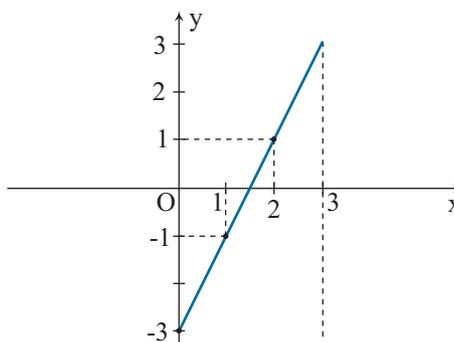


Figura 4.3

**Observação 10.** De modo geral, para construir o gráfico de uma função com lápis e papel, não basta encontrarmos alguns pontos dando alguns valores para a variável independente. No próximo capítulo estudaremos as funções elementares e faremos o esboço de seus gráficos utilizando as propriedades destas funções.

**Observação 11.** Um outro processo de construção de gráficos é a utilização de programas computacionais especificamente criados para este fim; se você já teve contato com estes programas na disciplina de Informática, agora pode usá-los livremente. No entanto, a utilização de imagens nada adianta se não soubermos analisar esta imagem. Para isso, também o conhecimento dos gráficos das funções elementares é importante.

## 4.4 Funções Crescentes e Funções Decrescentes

Como o próprio nome diz, podemos investigar o crescimento ou decréscimo de uma função real num determinado subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Veja o exemplo seguinte:

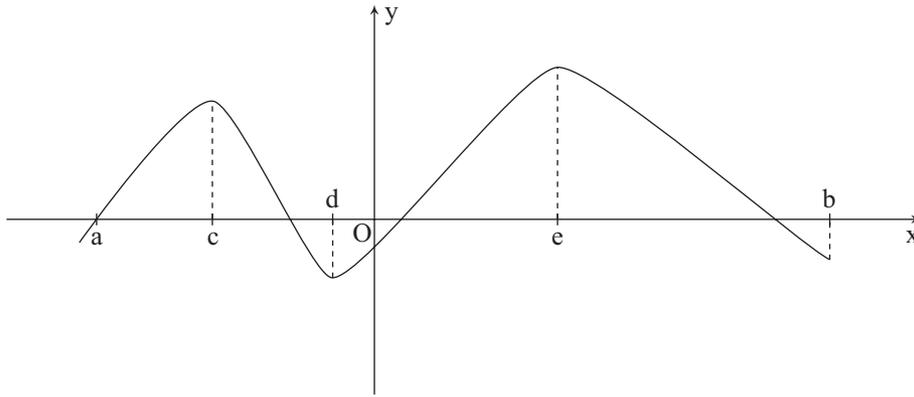


Figura 4.4

A função é crescente nos intervalos  $[a, c]$  e  $[d, e]$  e decrescente nos intervalos  $[c, d]$  e  $[e, b]$ .

**Definição.**

- (i) Dizemos que uma função  $f$  é crescente no conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  se e somente se  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) < f(x_2)$ , para todos  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$ .
- (ii) Dizemos que  $f$  é decrescente no conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  se e somente se  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) > f(x_2)$ , para todos  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$ .

*Simbolicamente:*

- (i)  $f$  é crescente em  $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- (ii)  $f$  é decrescente em  $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

**Observação 12.** Nas funções crescentes num intervalo  $I$ , à medida que os valores  $x$  aumentam em  $I$ , os valores  $f(x)$  também aumentam. Nas funções decrescentes num intervalo  $J$ , à medida que os valores  $x$  aumentam em  $J$ , os valores  $f(x)$  diminuem.

**Exemplos:**

19)  $f(x) = 3x - 1, D(f) = \mathbb{R}$

Para  $x_1$  e  $x_2$  reais com  $x_1 < x_2$ , **temos**  $f(x_1) = 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 = f(x_2)$ . Logo,  $f$  é crescente em todo seu domínio.

Note que usamos as propriedades da relação de ordem.

$$20) f(x) = -x + 4, D(f) = \mathbb{R}$$

Para  $x_1$  e  $x_2$  reais com  $x_1 < x_2$ , temos  $-x_1 > -x_2$  e assim  $f(x_1) = -x_1 + 4 > -x_2 + 4 = f(x_2)$ . Logo,  $f$  é decrescente em todo o seu domínio.

$$21) h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}, D(f) = \mathbb{R}$$

No intervalo  $[0, \infty)$ , se  $x_1 < x_2$ , temos que  $h(x_1) = x_1 + 1 < x_2 + 1 = h(x_2)$  e  $h$  é crescente. No intervalo  $(-\infty, 0)$ , se  $x_1 < x_2$ , temos que  $h(x_1) = -x_1 + 1 > -x_2 + 1 = h(x_2)$  e  $h$  é decrescente.

Assim,  $h$  é crescente no intervalo  $[0, \infty)$  e decrescente no intervalo  $(-\infty, 0)$ .

$$22) g(x) = 7, D(g) = \mathbb{R}$$

$g$  não é uma função crescente, nem decrescente, em qualquer intervalo de seu domínio; de fato, para  $x_1$  e  $x_2$  reais tais que  $x_1 < x_2$ , tem-se  $f(x_1) = 7 = f(x_2)$ .

## 4.5 Funções injetoras

Começemos com um exemplo: considere a função que a cada aluno matriculado na UFSC associa a sua data de nascimento. Certamente há pelo menos dois alunos da UFSC com a mesma data de nascimento, isto é, existem elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem. Isto não acontece se tomarmos a função que a cada aluno da UFSC associa seu número de matrícula: alunos diferentes têm diferentes números de matrícula, ou seja, elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes. Quando acontece esta última situação, dizemos que a função é **injetora**.

*Alguns autores dizem que a função é injetiva ou um a um. A propriedade também é chamada de injetividade.*

**Definição.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Dizemos que  $f$  é injetora se e somente se para quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  do domínio tais que  $x_1 \neq x_2$ , tem-se  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Simbolicamente,

- $f$  é injetora  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ , se  $x_1 \neq x_2$ , então  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Ou, equivalentemente:

- $f$  é injetora  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ , se  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $x_1 = x_2$

### Exemplos

23)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$ .

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  reais e suponhamos que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Então,

$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Assim,  $f$  é injetora.

24)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2 - 1$ .

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  reais. Se  $h(x_1) = h(x_2)$ , então:

$$(x_1)^2 - 1 = (x_2)^2 - 1$$

$$(x_1)^2 = (x_2)^2$$

Observe que não podemos concluir daí que  $x_1 = x_2$ , uma vez que podemos ter, por exemplo,  $(-1)^2 = 1^2$  e  $-1 \neq 1$ . Assim, a função  $h$  não é injetora.

**Observação 13.** Para mostrar que uma função não é injetora, basta exibir elementos diferentes do domínio que possuem a mesma imagem:  $x_1 \neq x_2$  e  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**Observação 14.** É possível, através do gráfico, verificar se uma função é injetora ou não. Uma função será injetora se e somente se qualquer paralela ao eixo das abscissas corta o gráfico da função em no máximo um ponto.

## 4.6 Funções sobrejetoras

Considere a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = 2t - 9$ . Qual a imagem de  $g$ ?

Seja  $y$  um número real qualquer. É possível encontrar um número real  $t$  tal que  $g(t) = y$ ?

Se  $y = 2t - 9$ , então  $t = \frac{y+9}{2}$  e  $g(t) = y$ . Assim, todo número real é imagem de algum elemento do domínio. A imagem da função é o próprio contradomínio  $\mathbb{R}$  e a função é chamada **sobrejetora**.

*Alguns autores dizem que a função é sobrejetiva. A propriedade também é chamada de sobrejetividade.*

**Definição.** Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função. Dizemos que  $f$  é sobrejetora se e somente se a imagem de  $f$  for igual ao seu contradomínio, ou seja,  $\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y$ .

**Exemplos:**

25)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  é sobrejetora.

De fato: seja  $y \in \mathbb{R}$ . Se  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , então

$$x = 2y - 2 \text{ e } f(x) = f(2y - 2) = \frac{1}{2}(2y - 2) + 1 = y.$$

Logo,  $f$  é sobrejetora.

26)  $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $g(x) = x^2$  é sobrejetora.

De fato: seja  $y \in [0,1]$ , ou seja,  $0 \leq y \leq 1$ . Sendo  $y$  um número positivo (ou nulo), existe  $\sqrt{y}$  e, além disso,  $0 \leq \sqrt{y} \leq 1$ . Então, se  $x = \sqrt{y}$ , temos  $g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = |y| = y$ . Logo,  $g$  é sobrejetora.

27)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |x|$  não é sobrejetora.

Existe pelo menos um número real, por exemplo,  $-5$ , que não é imagem de nenhum elemento do domínio (o módulo de um número é sempre positivo ou nulo!). A imagem da função é  $[0, \infty)$ .

**Observação 15.** Uma função  $f$  não é sobrejetora quando existe pelo menos um elemento do contradomínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio. Note que uma função do domínio na imagem,  $f : D(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ , é sempre sobrejetora.

*Lembre-se que a negação do quantificador “todo” é o quantificador “existe pelo menos um”, no sentido de “existe pelo menos um valor  $x$  para o qual a definição não se aplica”.*

**Observação 16.** Uma função terá a propriedade de ser injetora ou não dependendo de seu domínio, bem como de seu contradomínio. O mesmo acontece para a propriedade de ser sobrejetora.

Por exemplo:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 - \sqrt{5}$  não é injetora mas  
 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6x^2 - \sqrt{5}$  é injetora.

Por quê?

$h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$  não é sobrejetora mas  
 $s : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), s(x) = \sqrt{x}$  é sobrejetora.

Por quê?

Aqui, novamente vale lembrar a **Observação 6**: não basta somente a regra (a lei) de associação dos elementos. É preciso também estar claro quais são os conjuntos domínio e contradomínio. Dependendo dos conjuntos estabelecidos, a função pode ser injetora ou não, sobrejetora ou não.

## 4.7 Funções bijetoras

A função  $g : [0,1] \rightarrow [0,1], g(x) = x^2$  é injetora e sobrejetora, como já foi visto.

Dizemos neste caso que  $g$  é uma função bijetora ou que é uma bijeção do intervalo  $[0,1]$ .

**Definição.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é bijetora se e somente se é injetora e sobrejetora.

### Exemplos

28)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3x - 1$  é bijetora.

(i) é injetora, pois, dados  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{R}$  com  $h(a) = h(b)$ , tem-se  $3a - 1 = 3b - 1$ , o que significa  $a = b$ .

(ii) é sobrejetora, pois, dado qualquer número real  $y$ , existe  $x = \frac{y+1}{3}$  tal que  $h(x) = y$ .

29)  $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $g(x) = x^3$  é bijetora.

(i) é injetora, pois para  $a$  e  $b$  em  $[0,1]$  tais que  $a^3 = b^3$ , temos  $a = b$  (prove!).

(ii) é sobrejetora, pois para qualquer  $y$  em  $[0,1]$  existe  $x = \sqrt[3]{y}$ ,  $x$  no intervalo  $[0,1]$  (por que?) tal que  $g(x) = y$ .

## 4.8 Composição de Funções

Neste tópico estudaremos um procedimento de construir novas funções a partir de funções dadas, procedimento este conhecido como “composição de funções”. Começaremos com um exemplo:

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas por  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = x^2 - 3x$ . Como  $f$  é sobrejetora (prove!), faz sentido aplicar a função  $g$  a  $f(x)$ , uma vez que  $\text{Im}(f) = D(g) = \mathbb{R}$ .

Então,  $g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 - 3(2x) = 4x^2 - 6x$ . Dizemos que a função  $h$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 4x^2 - 6x$ , resulta da composição de  $g$  e  $f$  (nesta ordem). Escrevemos  $h = g \circ f$ . Em outras palavras, a função que associa  $x \in \mathbb{R}$  a  $g(f(x)) \in \mathbb{R}$  é chamada função composta de  $g$  com  $f$  e denotada por  $g \circ f$ .

É sempre possível determinar a função composta de duas funções?

Tomemos por exemplo  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ . Será possível calcular  $g \circ f(-3)$ ?

Vejamos:  $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = g(-6) = \sqrt{-6}$ , que não é um número real! Isto ocorre porque  $f(-3)$  não pertence ao domínio de  $g$ , que é  $[0, \infty)$ . Concluimos que  $g \circ f$  existe para aqueles valores de  $x$  tais que  $f(x) \geq 0$ . De modo geral, para que possamos definir a função composta de  $g$  com  $f$ , é preciso que  $\text{Im}(f) \subset D(g)$ .

**Definição.** Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : E \rightarrow F$  funções tais que  $\text{Im}(f) \subset E$ . A função que associa a cada  $x \in A$ ,  $g(f(x)) \in F$ , é chamada função composta de  $g$  com  $f$  e é denotada por  $g \circ f$ . A função  $g \circ f : A \rightarrow F$  é definida por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

### Exemplos

30)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 1$

Como  $f$  é sobrejetora (prove!), temos que  $\text{Im}(f) = D(g) = \mathbb{R}$ . Logo, a função composta de  $g$  com  $f$  é:  $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 2 \cdot (3x) + 1 = 6x + 1$

Podemos também determinar a composta de  $f$  com  $g$ ?

Como  $g$  é sobrejetora (prove!), temos que  $\text{Im}(g) = D(f)$ . Logo, a função composta de  $f$  com  $g$  é dada por:

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 3 \cdot (2x + 1) = 6x + 3$$

Como você pode observar,  $f \circ g$  e  $g \circ f$  são funções diferentes!

31)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x$  e  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

Neste caso temos  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$  e  $D(g) = [0, \infty)$ . Como  $\text{Im}(f)$  não está contida no domínio de  $g$ , não é possível definir a composta de  $g$  com  $f$ ,  $g \circ f$ . No entanto, como  $\text{Im}(g) = [0, \infty) \subset \mathbb{R} = D(f)$ , podemos definir a composta de  $f$  com  $g$ :  $f \circ g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$ .

Para podermos definir a composta de  $g$  com  $f$  (a função  $g \circ f$ ), devemos fazer uma restrição ao domínio da função  $f$  para que sua imagem seja um conjunto de números positivos; ao fazer isso, estamos definindo uma nova função  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 2x$ ,  $\text{Im}(h) = [0, \infty) \subset [0, \infty) = D(g)$  e, portanto,  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = \sqrt{2x}$ .

32) Considere as funções  $f(x) = x^2 + 5$  e  $g(x) = \sqrt{x-6}$

Qual deve ser o domínio da função  $f$  para que seja possível definir  $g \circ f$ ?

Como  $g \circ f$  só poderá ser definida quando  $\text{Im}(f) \subset D(g)$ , devemos inicialmente determinar  $D(g)$ , dado por  $D(g) = \{x \in \mathbb{R} / x-6 \geq 0\} = [6, \infty)$ .

Assim, para que  $\text{Im}(f) \subset D(g)$  devemos ter  $f(x) = x^2 + 5 \geq 6$ . Resolvendo a inequação, temos que os valores de  $x$  que resultam em  $f(x) = x^2 + 5 \geq 6$  constituem o conjunto  $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . Tomando o domínio de  $f$  como o conjunto  $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ , é possível definir  $g \circ f$ . Assim, para  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: [6, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5) = \sqrt{(x^2 + 5) - 6} = \sqrt{x^2 - 1}$

## Exercícios Propostos

5) Sejam  $f(x) = \frac{1}{3x^2}$  e  $g(x) = x^2 + 2$ . Determine, se possível, as funções  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .

6) Se  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  e  $g(x) = \frac{x+1}{|x+5|}$ , determine condições para que se possa definir  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .

### 4.8.1 Propriedades da composição de funções

A composição de funções pode ser vista como uma “operação” de funções. Neste sentido, algumas propriedades dessa operação podem ser úteis.

No que segue,  $f$ ,  $g$  e  $h$  denotam funções compatíveis para a definição de compostas.

P1) A composição de funções em geral não é comutativa, ou seja,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

(Procure um exemplo para o qual a igualdade ocorre)

P2) A composição de funções é associativa, ou seja,

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

P3) A função identidade ( $A \subset \mathbb{R}$  e  $\text{Id} : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Id}(x) = x$ ) funciona como um “elemento neutro” da composição, ou seja: para  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\text{Id} : A \rightarrow A$ ,  $\text{Id} \circ f = f \circ \text{Id} = f$ .

*Esta propriedade nos permite compor mais de duas funções, respeitando as restrições da definição.*

De fato,  $\text{Id} \circ f$ ,  $f \circ \text{Id}$  e  $f$  têm o mesmo domínio  $A$  e ainda:

$$[(\text{Id}) \circ f](x) = \text{Id}(f(x)) = f(x), \quad \forall x \in D(f) \text{ e}$$

$$[f \circ (\text{Id})](x) = f(\text{Id}(x)) = f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

Logo,  $\text{Id} \circ f = f \circ \text{Id} = f$ .

## 4.9 Função Inversa

Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$ . Existe uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \text{Id}(x) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ? Vejamos:

$$(i) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = x$$

$$(ii) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 1 = x$$

Da igualdade (ii) obtemos

$$3 \cdot g(x) - 1 = x$$

$$3 \cdot g(x) = x + 1$$

$$g(x) = \frac{x+1}{3}$$

Verificamos que também a igualdade (i) é verdadeira para  $g(x)$ :

$$g(3x - 1) = \frac{3x - 1 + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x+1}{3}$  é chamada de função inversa da função  $f$  e é denotada por  $f^{-1}$ .

**Pergunta:** para toda função  $f$  é possível encontrar  $f^{-1}$ ?

Observemos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2$ . Procuramos uma função  $g$  tal que  $(f \circ g)(x) = x$  e  $(g \circ f)(x) = x$ , ou seja:

$$(i) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x$$

$$(ii) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 = x$$

Da igualdade (ii) obtemos  $g_1(x) = \sqrt{x}$  ou  $g_2(x) = -\sqrt{x}$ , duas opções para  $g(x)$  (lembre-se que já vimos isto na parte de Equações). O domínio destas funções é  $[0, \infty) = \text{Im}(f)$ , mas elas devem satisfazer (i). Como  $g_1(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$  e  $g_2(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x|$ , nenhuma das duas opções para  $g$  satisfaz a condição exigida. Logo, não é possível encontrar a função inversa de  $f$ .

**Definição.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Se existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in B$  e  $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ , então a função  $g$  é chamada função inversa de  $f$  e é denotada por  $f^{-1}$ .

**Observação 17.** Como uma função é uma relação, podemos olhar para uma função  $f : A \rightarrow B$  como uma relação de  $A$  em  $B$ , isto é,  $f = \{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\} = \{(x, f(x)) / x \in A\}$ .

Lembrando: a relação inversa  $g$  é dada por  $g = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in f\}$ , ou seja,  $(y, x) \in g$  se e somente se  $(x, y) \in f$ .

Como sempre existe a relação inversa de uma relação (veja a unidade “Relações”), a pergunta então é: sob que condições a relação inversa  $g$  de  $B$  em  $A$  é uma função? Em outras palavras, que característica deve ter a função  $f$  para que sua inversa exista?

Observe no exemplo anterior qual era o “problema” da função  $f$  que “impedia” a existência da inversa: o fato de dois elementos diferentes do domínio terem a mesma imagem, uma vez que  $x^2 = (-x)^2$ . Ao tentar calcular a função  $g$ , acabamos ficando com duas possibilidades, sendo que nenhuma delas “servia” para a inversa. A função inversa  $f^{-1}$  deve “fazer o caminho de volta da  $f$ ”, no sentido de “desfazer o que foi feito por  $f$ ”. Para isso, é necessário que cada elemento da imagem de  $f$  se origine de um único elemento do domínio; se isto não acontece, ao “fazer o caminho de volta” a candidata a inversa acaba por encontrar duas imagens para um único elemento de seu domínio (que é a imagem de  $f$ ), o que a impede de ser uma função. Assim, uma das condições para que exista  $f^{-1}$  é que a função  $f$  deve ser injetora.

Observemos agora a função  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x$ . Ao “fazer o caminho de volta”, a candidata a inversa deve “partir” de  $\mathbb{R}$  e

“voltar” ao intervalo  $(0,1)$ . Mas existem elementos de  $\mathbb{R}$  que não são imagem de nenhum elemento de  $(0,1)$  pela função  $h$ . Logo, esta candidata não será uma função, uma vez que, para ser função, todos os elementos de seu domínio devem ter uma imagem, isto é, a lei deve valer para todos os elementos do domínio.

Note que se considerarmos o conjunto imagem de  $h$ , todos os elementos deste conjunto estão associados a algum elemento do domínio. Conclusão: outra condição, além de ser injetora, para que a inversa de uma função  $f$  exista é que  $f$  seja sobrejetora. O teorema a seguir caracteriza as funções que admitem inversa.

**Teorema.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Se  $f$  é bijetora, então existe  $f^{-1} : B \rightarrow A$ . Reciprocamente, se existe  $f^{-1}$ , então  $f$  é bijetora.*

Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Hipótese:  $f$  é bijetora

Tese: existe  $f^{-1}$

Mostraremos que a relação inversa de  $f$  é uma função. Seja  $g$  a relação inversa de  $f$ ,

$$g = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in f\}$$

(i) Seja  $y \in B$  qualquer. Como  $f$  é sobrejetora, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ , ou seja,  $(x, y) \in f$ . Logo,  $(y, x) \in g$ . Assim, todo elemento de  $B$  está relacionado com algum elemento de  $A$ .

(ii) Seja  $y \in B$ . Suponhamos que este  $y$  admita duas imagens  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$ , isto é,  $(y, x_1) \in g$  e  $(y, x_2) \in g$ . Então  $(x_1, y) \in f$  e  $(x_2, y) \in f$ , ou seja,  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Como  $f$  é injetora, devemos ter  $x_1 = x_2$  e assim todo elemento  $y$  de  $B$  está relacionado com um único elemento de  $A$ . Logo,  $g$  é uma função e  $g$  é a inversa  $f^{-1}$  de  $f$ .

( $\leftarrow$ ) Hipótese: existe  $f^{-1}$

Tese:  $f$  é bijetora

(i) provemos que  $f$  é injetora:

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$  tais que  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , ou seja,  $(x_1, y) \in f$  e  $(x_2, y) \in f$ . Então  $(y, x_1) \in f^{-1}$  e  $(y, x_2) \in f^{-1}$ . Como  $f^{-1}$  é função, devemos ter  $x_1 = x_2$ . Logo,  $f$  é injetora.

(ii) provemos que  $f$  é sobrejetora:

Seja  $y \in B$ . Como  $f^{-1}$  é função, existe um único  $x \in A$  tal que  $(y, x) \in f^{-1}$ . Então  $(x, y) \in f$ , ou seja, existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Logo,  $f$  é sobrejetora.

De (i) e (ii) temos que  $f$  é bijetora.

*Alguns autores dizem que  $f$  é invertível.*

**Observação 18.** Quando existe a inversa de uma função  $f$ , dizemos que  $f$  é **invertível**.

**Observação 19.** Quando  $f : A \rightarrow B$  é invertível, para  $x \in A$  e  $y \in B$ ,  $f(x) = y$  se e somente se  $f^{-1}(y) = x$ .

**Observação 20.**  $D(f^{-1}) = \text{Im}(f)$  e  $\text{Im}(f^{-1}) = D(f)$ .

**Observação 21.** Se uma função  $f : A \rightarrow B$  é injetora, a função  $f_1 : A \rightarrow \text{Im}(f)$  será invertível. Em outras palavras, se restringirmos o contradomínio de uma função injetora à sua imagem, ela será invertível.

**Exemplo**

33)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  não é invertível, mas

$h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $h(x) = x^2$  é invertível e sua inversa é

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

## Exercícios resolvidos:

1) Encontre a inversa da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 1$ .

Resolução:  $y = 2x^3 - 1, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y + 1 = 2x^3$$

$$x^3 = \frac{y+1}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}} = f^{-1}(y).$$

Assim, a função inversa de  $f$  é a função

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}.$$

Note que podemos usar qualquer letra para identificar a variável independente. Podemos então escrever

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \text{ ou então}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(t) = \sqrt[3]{\frac{t+1}{2}}.$$

2) Encontre a inversa da função  $f: (-\infty, 0] \rightarrow [5, +\infty), f(x) = 3x^2 + 5$ .

Resolução:  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y = 3x^2 + 5$$

$$x^2 = \frac{y-5}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{y-5}{3}}$$

Como  $x < 0$ , tomamos  $x = -\sqrt{\frac{y-5}{3}}$ . A inversa de  $f$  será então

$$f^{-1} : [5, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3}}.$$

**Observação 22.** Muitas vezes sabemos que a função é inversível, mas não conseguimos a expressão da inversa devido à dificuldade (ou até impossibilidade) de “isolar” a variável independente em função da variável dependente. Por exemplo: usando as idéias do Cálculo podemos mostrar que  $f(x) = x^5 + x + 1 = y$  é inversível. Você consegue “isolar”  $x$  em função de  $y$ ?

### 4.9.1 Propriedades da função inversa

**P1)** A inversa de uma função é única.

Demonstre como exercício.

**P2)** Se  $f$  é inversível, então  $f^{-1}$  é inversível e  $(f^{-1})^{-1} = f$  (ou ainda: a inversa da inversa de uma função é a própria função).

Demonstre como exercício.

**P3)** Se  $f : A \rightarrow B$  e  $h : B \rightarrow C$  são inversíveis, então  $h \circ f : A \rightarrow C$  é inversível e  $(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$ .

**Demonstração:**

Para provarmos esta propriedade, devemos provar inicialmente que a composta de duas funções bijetoras é bijetora.

**(i)**  $h \circ f$  é injetora:

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  em  $A$  tais que  $(h \circ f)(x_1) = (h \circ f)(x_2)$ . Então  $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$ . Como  $h$  é injetora, devemos ter  $f(x_1) = f(x_2)$ ; como também  $f$  é injetora, temos  $x_1 = x_2$  e  $h \circ f$  é injetora.

**(ii)**  $h \circ f$  é sobrejetora:

Seja  $z \in C$ ; como  $h$  é sobrejetora, existe  $y \in B$  tal que

$h(y) = z$ . Como também  $f$  é sobrejetora, temos que existe um  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Assim, existe  $x \in A$  tal que  $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = z$  e  $h \circ f$  é sobrejetora. Complete a demonstração como exercício.

P4) O gráfico de  $f^{-1}$  é simétrico ao gráfico de  $f$  em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Como exemplo, esboce os gráficos de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 1$  e de sua inversa  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$ .

## Exercícios propostos

7) Verifique a propriedade P3 para as funções

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{2}{5x} \text{ e } g: (0, \infty) \rightarrow (-3, \infty), g(x) = 4x^2 - 3.$$

8) Um fazendeiro tem 100 m de cerca para construir um galinheiro retangular. Chamando  $x$  o comprimento de um lado do galinheiro, descreva a área em função de  $x$ . Use o resultado para achar a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

9) Suponha agora que o fazendeiro da questão (8) decida construir a cerca, mas aproveitando a parede de um celeiro, de modo que ele terá de cercar apenas 3 lados. Se  $t$  é o comprimento de um lado perpendicular à parede do celeiro, ache a área cercada como função de  $t$ . Ache também a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

10) A área de um retângulo pode ser função de seu perímetro?

11) Seja  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Encontre o valor de  $x$  tal que  $f(x) = 0,5$ .

12) Mostre que a operação “adição de números naturais” é uma

função:  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(a, b) = a + b$  (lembre que:  $(a, b) = (c, d)$  se e somente se  $a = c$  e  $b = d$ ).

**13)** Determine o domínio das funções:

a)  $f(x) = \frac{4x-5}{3x-1}$

b)  $g(x) = \frac{x-8}{x^2-7x+6}$

c)  $h(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{3x+5}}$

**14)** Classifique as funções seguintes em: (I) injetora, (II) sobrejetora, (III) bijetora, (IV) não injetora e (V) não sobrejetora:

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$

b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1 - x^2$

c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $h(x) = |x - 1|$

d)  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $m(x) = -3x + 2$

e)  $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n(x) = [x]$  (maior inteiro)

f)  $p : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $p(x) = \frac{1}{x}$

g)  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(x) = x^3$

h)  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x) = |x| \cdot (x - 1)$

**15)** Determine o menor valor de  $b$  em  $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$  de modo que a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $B$  definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  seja sobrejetora.

**16)** Determine o maior valor de  $a$  em  $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$  de modo que a função  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$  seja injetora.

**17)** Os conjuntos  $A$  e  $B$  têm respectivamente  $m$  e  $n$  elementos. Considera-se uma função  $f : A \rightarrow B$ . Qual a condição sobre  $m$  e  $n$  para que  $f$  possa ser injetora? E para  $f$  ser sobrejetora? E bijetora?

**18)** Quantas funções injetoras podemos definir de  $A = \{a, b\}$  em  $B = \{c, d, e, f\}$ ?

**19)** Quantas funções sobrejetoras podemos definir de  $A = \{a, b, c\}$  em  $B = \{d, e\}$ ?

## Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos:

- 1) O conceito de função.
- 2) Gráfico de uma função.
- 3) Funções crescentes e funções decrescentes.
- 4) Funções injetoras, funções sobrejetoras e funções bijetoras.
- 5) Composição de funções.
- 6) Função inversa.

## Referências

FLEMMING, D.M. & GONÇALVES, M.B.; *Cálculo A*, Makron Books - 1992.

GUIDORIZZI, H.L.; *Um Curso de Cálculo*, Livros Técnicos e Científicos - 1987.

LIMA, E.L. & outros ; *A matemática do ensino médio*, Volume 1; Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2001.