5 Funções elementares

5 Funções elementares

O objetivo deste capítulo é fazer um estudo das funções elementares, as quais servem de modelo para a descrição de fenômenos e situações reais, preparando o caminho para a compreensão do Cálculo Diferencial e Integral. Nosso estudo terá como base o capítulo anterior: provavelmente você terá que se deslocar para aquele universo várias vezes. Veremos as funções polinomiais, funções racionais e funções trigonométricas. Use seus conhecimentos de pacotes computacionais para visualizar gráficos; no final do capítulo listaremos alguns deles. Lembre-se que deste estudo dependerá seu sucesso nas disciplinas de Cálculo.

5.1 Funções polinomiais

Estudaremos com detalhes as funções polinomiais de grau um (função afim) e dois (função quadrática). Em seguida faremos alguns comentários sobre as funções polinomiais de outros graus.

5.1.1 Função afim

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes reais a e b tais que $f(x)=ax+b$, para todo $x\in\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$ é o "maior" conjunto de valores para os quais é possível encontrar $f(x)$. Quando o domínio não é especificado, estaremos considerando-o como o conjunto $\mathbb{R}$.

Um exemplo de situação real descrita por uma função afim é o preço a pagar por uma corrida de táxi: o valor da corrida depende da distância percorrida (em km) e dos valores constantes do km rodado e da bandeirada. A distância percorrida em km é multiplicada por uma constante a (o valor do km rodado), e a este produto adiciona-se um valor constante inicial b (que é o valor da bandeirada), resultando no preço a pagar. Assim, a distância percorrida (em km) é a variável independente x e $f(x)=ax+b$ ou $y=ax+b$ é o preço a pagar pela corrida.

Exemplos de funções afins:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 7 \quad (a = 3 \text{ e } b = 7)$

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x + 1 \quad (a = -1 \text{ e } b = 1)$

3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2}x - 23 \quad (a = \frac{1}{2} \text{ e } b = -23)$

4) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) = \sqrt{7}x \quad (a = \sqrt{7} \text{ e } b = 0)$

5) $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s(x) = 59 \quad (a = 0 \text{ e } b = 59)$

- **Casos particulares da função afim**

(i) $a = 0$

Neste caso, $f(x) = b,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e a função chama-se função *constante* (veja o exemplo 5). O gráfico da função constante $f(x) = b$ é o conjunto $G(f) = \{(x, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, uma reta paralela ao eixo x e que passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3$

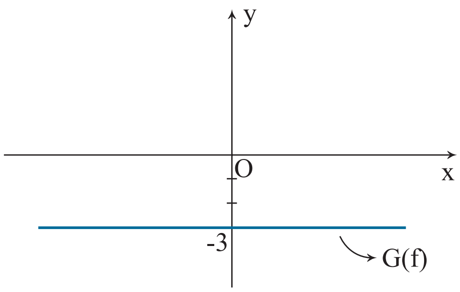


Figura 5.1

Observação 1. Você pode notar que o nome de função *constante* já revela o comportamento da função: independente da variável x, o valor de $f(x)$ é sempre o mesmo.

(ii) $a = 1$ e $b = 0$

Neste caso $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e esta é a função *identidade*, já vista no Capítulo 4. Seu gráfico é o conjunto $G(f) = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, a reta que é a bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$

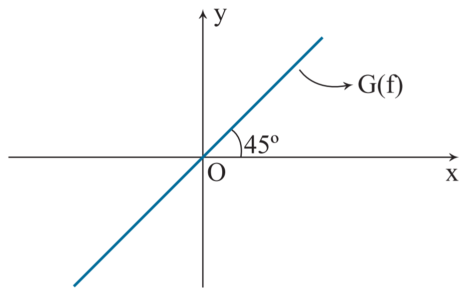


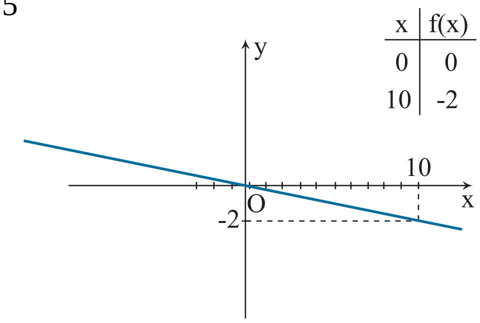
Figura 5.2

(iii) $b=0$ e $a\neq 0$

Neste caso $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$, e estas são chamadas funções *lineares*. O gráfico de uma função linear é o conjunto $G(f)=\{(x,ax)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\}$, uma reta que passa pela origem do plano cartesiano, uma vez que $f(0)=0$.

Exemplos

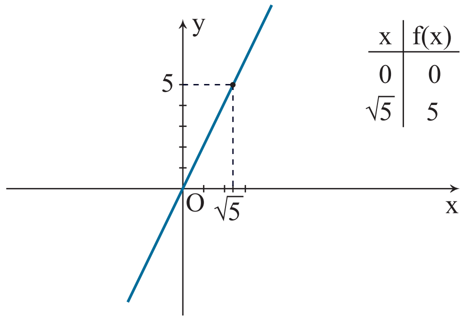
7) $f(x)=-\dfrac{x}{5}$



x	f(x)
0	0
10	-2

Figura 5.3

8) $f(x)=\sqrt{5}x$



x	f(x)
0	0
$\sqrt{5}$	5

Figura 5.4

9) $f(x)=\frac{2}{5}x$

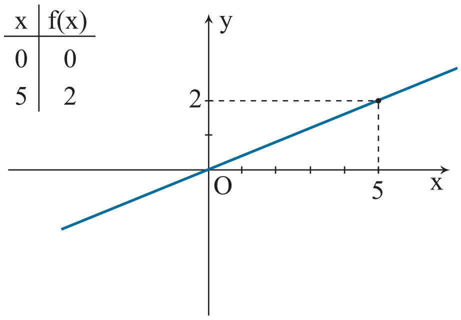


Figura 5.5

- **Gráfico de uma função afim**

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$. Podemos considerar $a\neq 0$, uma vez que já conhecemos o gráfico da função constante.

Proposição. O gráfico $G(f)$ da função $f(x)=ax+b$ é uma reta.

> **Demonstração:** Sejam $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ e $S(x_3,y_3)$ pontos quaisquer do gráfico de *f*. Nosso objetivo é mostrar que estes três pontos são colineares, isto é, estão alinhados. Lembrando que o gráfico é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$, podemos escrever: $y_1=ax_1+b,\ y_2=ax_2+b$ e $y_3=ax_3+b$. Veja a figura:

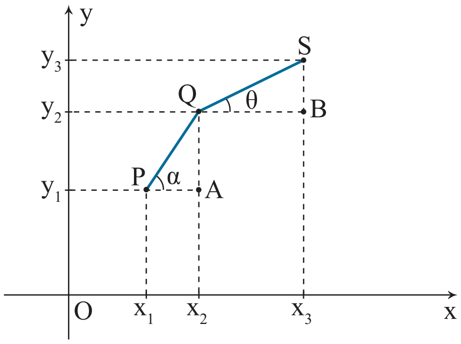


Figura 5.6

Os triângulos *PAQ* e *QBS* são triângulos retângulos. As tangentes dos ângulos α e θ são dadas pelas razões $\frac{AQ}{AP}$ e $\frac{BS}{BQ}$:

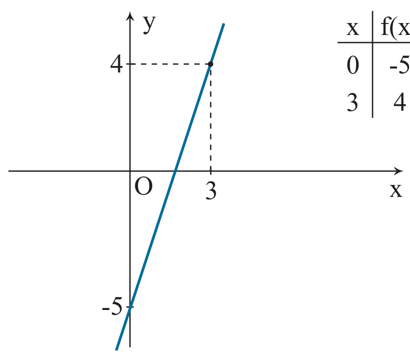
$$\frac{AQ}{AP}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=\frac{ax_2+b-ax_1-b}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$$

Analogamente, temos que $\dfrac{BS}{BQ} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$. Assim, $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{BS}{BQ}$. E como os ângulos em A e B são retos, segue que os triângulos PAQ e QBS são semelhantes e assim os ângulos α e θ são iguais. Conclui-se daí que os pontos P, Q e S estão alinhados. Como P, Q e S são pontos quaisquer do gráfico, fica provado que o gráfico da função afim é uma reta.

Conseqüência: O gráfico de uma função afim fica completamente determinado por apenas dois pontos (lembre-se que existe uma única reta que passa por dois pontos).

Exemplo

10) Esboçar o gráfico da função $f(x) = 3x - 5$

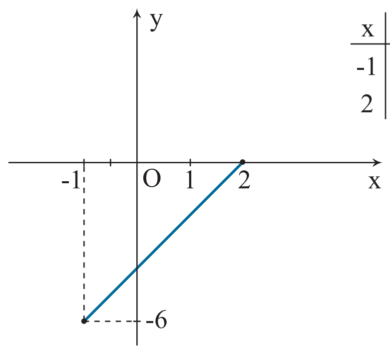


x	f(x)
0	-5
3	4

Figura 5.7

Observação 2. Uma função afim pode estar definida em um intervalo, isto é, podemos restringir seu domínio a um intervalo. Neste caso, seu gráfico é um segmento de reta. Veja o exemplo 11:

11) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 4$.



x	f(x)
-1	-6
2	0

Figura 5.8

Observação 3. Se $f(x) = ax + b$, chamamos o número a de "coeficiente angular da reta" que representa o gráfico da função f, ou "taxa de crescimento da função f". Note que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, para quaisquer números reais x_2 e x_1. Veja a figura:

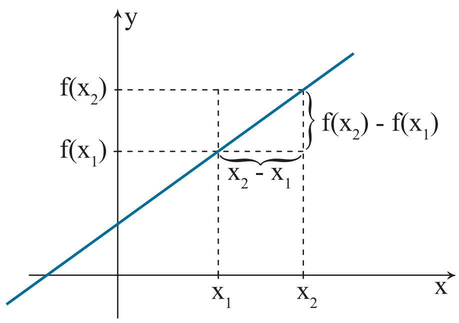


Figura 5.9

Exercício resolvido

1) Seja $f(x) = ax + b$. Mostre que:

a) se $a > 0$, f é crescente;

b) se $a < 0$, f é decrescente.

Resolução.

a) Sabemos do Capítulo 4 que:

"*Uma função é crescente em um conjunto A de seu domínio se e somente se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) < f(x_2)$, *para todos* x_1 e x_2 *no conjunto A*".

Como o domínio de f é $\mathbb{R}$, vamos considerar x_1 e x_2 dois números reais quaisquer, com $x_1 < x_2$. Pela Obs. 3 sabemos que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ e neste caso podemos escrever

$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$. Por hipótese, temos $a > 0$ e também estamos considerando $x_1 < x_2$, o que significa $x_2 - x_1 > 0$. Então, $a(x_2 - x_1) > 0$. Assim, $a(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é crescente.

b) Do Capítulo 4 sabemos que:

"*Uma função f é decrescente em um conjunto A de seu domínio se e somente se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) > f(x_2)$, *para todos* x_1 e x_2 *no conjunto A*".

Consideremos então x_1 e x_2 dois números reais quaisquer, com $x_1 < x_2$; então $x_2 - x_1 > 0$ e como por hipótese $a < 0$, teremos $a(x_2 - x_1) < 0$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) < 0$, o que significa que $f(x_1) > f(x_2)$. Concluímos então que f é decrescente.

- **Inversa de uma função afim**

Com exceção das funções constantes, toda função afim é inversível. Isto acontece porque as funções afins são bijetoras (prove isso como exercício!). Vamos fazer um exemplo de como encontrar a inversa de uma função afim:

Exemplo

12) Calcular a inversa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$

Resolução. Estamos procurando uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$ para todo x real (lembre-se da definição de função inversa, no Capítulo 4). Então fazemos: $f(g(x)) = 5 \cdot g(x) + 1 = x$

A segunda igualdade nos dá a função procurada:

$$g(x) = \frac{x-1}{5}$$

Também se verifica que

$$g(f(x)) = \frac{f(x)-1}{5} = \frac{5x+1-1}{5} = \frac{5x}{5} = x$$

Assim, g é a função inversa de f e é anotada

$$f^{-1}: f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$$

Exercícios propostos

1) Faça o gráfico das funções:

a) $f(x) = -\frac{1}{13}x + \frac{3}{5}$

b) $h(x) = \sqrt{2}x$

c) $g(x) = 6$

d) $k : (-1,1) \to \mathbb{R},\ k(x) = -3x + 2$

e) $s(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2) Defina a função afim cujo gráfico contém os pontos (1, 5) e (- 9, 10).

3) Encontre a inversa das funções:

a) $f(x) = -4x - 1$

b) $g(x) = \frac{x-1}{8}$

c) $h(x) = 7x$

4) Para $f(x) = \frac{45}{100}x - \frac{2}{3}$, calcule *x* de modo que $f(x) = \frac{7}{5}$.

5.1.2 Funções quadráticas

Definição. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se quadrática (ou função polinomial do segundo grau) se existem constantes reais a, b e c, com* $a \neq 0$, *tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplos

13) $f(x) = 5x^2 - 2x \quad (a = 5,\ b = -2,\ c = 0)$

14) $g(x) = \pi x^2 + 1 \quad (a = \pi,\ b = 0,\ c = 1)$

15) $h(x) = x^2 + 7x - \frac{1}{2}$ $\quad (a = 1,\ b = 7,\ c = -\frac{1}{2})$

Você sabe a diferença?

Observação 4. Não confunda a *função quadrática* com a *equação do segundo grau*! Muitas vezes vemos também a expressão *função do segundo grau*, que não está correta, uma vez que não há definição do que seja o *grau* de uma função.

Observação 5. Resolução de problemas que utilizam uma função quadrática ou uma equação do segundo grau, estão entre os mais antigos da matemática.

- **Raízes da função quadrática**

As raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores x para os quais se tem $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$ (esta é uma *equação do segundo grau*). As raízes da equação $f(x) = 0$ também são chamadas de raízes da função quadrática $f(x)$.

Observação 6.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, temos duas raízes reais distintas.

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, não existem raízes *reais* para a função $f(x)$. Neste caso as raízes serão *números complexos* dados por $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, com $i = \sqrt{-1}$.

Se $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

- **Gráfico da função quadrática**

Aprendemos que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma *parábola*. Mas o que é uma parábola?

Definição. *Dados um ponto F no plano e uma reta d que não contém F, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de F e de d. O ponto F é o foco da parábola e d é a **reta diretriz**.*

Observação 7. Uma parábola é então uma curva no plano, que é simétrica, sendo o eixo de simetria a reta que contém o foco F e que é perpendicular à reta diretriz. Veja a figura:

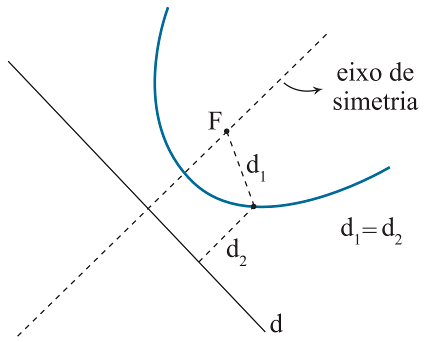
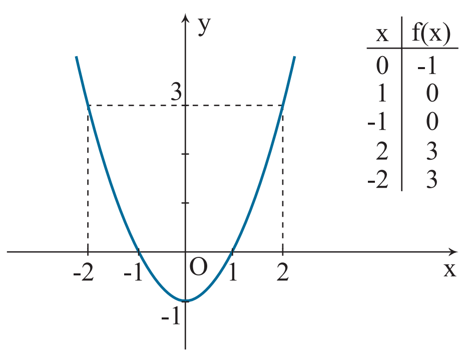


Figura 5.10

A parábola é a curva que serve de modelo para o gráfico da função quadrática. Mas nem toda parábola é o gráfico de uma função deste tipo. As parábolas que serão gráficos de funções quadráticas são aquelas cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Y. Com estas informações, como comentamos no Capítulo 4, alguns pontos, obtidos atribuindo valores à variável independente x, são suficientes para esboçar o gráfico de uma função quadrática. Valores especiais da variável independente x são as raízes e $x = 0$. Lembre-se que as raízes são tais que $f(x) = 0$. Assim, os pontos $(x, 0)$, x real, são pontos de intersecção da curva com o eixo X; dizemos também que a curva "corta" o eixo X nos pontos $(x, 0)$. Para $x = 0$ temos $f(0) = c$ (pois $f(x) = ax^2 + bx + c$), e $(0, c)$ é o ponto de intersecção da curva com o eixo Y (ou o ponto onde a curva "corta" o eixo Y).

Exemplo

16) Esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$



x	f(x)
0	-1
1	0
-1	0
2	3
-2	3

Figura 5.11

Outra característica da parábola será importante para esboçar gráficos: a concavidade.

- **Concavidade, vértice e imagem da função quadrática**

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita como $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Observe que a primeira parcela da expressão dentro dos colchetes depende de x e é sempre positiva, enquanto a segunda parcela é constante. Como x pode ser qualquer número real, com as propriedades estudadas no Capítulo 2 (Números Reais) é possível mostrar que a partir de certo valor x tem-se $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (o membro à direita da desigualdade é constante), ou seja, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq 0$.

Suponhamos $a > 0$. Então $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \geq 0$ a partir de um determinado valor x. Por um resultado do Capítulo 2, o conjunto dos $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tem um *mínimo*. De $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, isto acontece para o menor valor possível da parcela $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, ou seja, $x = \frac{-b}{2a}$. Isto significa que para $x = \frac{-b}{2a}$ o valor $f(x)$ é o *menor possível*, ou ainda, $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ é o ponto do gráfico de f que possui a *menor ordenada*. Podemos então concluir que a parábola neste caso é *côncava para cima*, como mostra a figura:

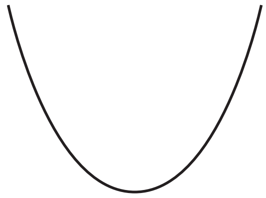


Figura 5.12

Se $a < 0$, concluímos que $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ é negativa a partir de um determinado valor x e que a função deverá apresentar um valor *máximo* para $x = \frac{-b}{2a}$. Neste caso, a parábola é *côncava para baixo*, como mostra a figura:

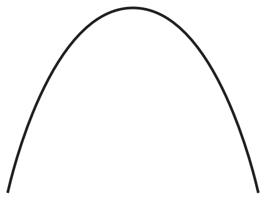


Figura 5.13

O ponto $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ é chamado de *vértice* da parábola. Calculando $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ obtemos o ponto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Assim, o vértice tem coordenadas $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

A reta vertical que passa pelo vértice é o *eixo de simetria* da parábola.

Note que $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ é o **menor** valor assumido pela função, se $a > 0$, e o **maior** valor assumido pela função, se $a < 0$. Isto nos dá a informação sobre o conjunto imagem da função *f*:

(i) Se $a > 0$, $\text{Im } f = [y_v, \infty)$

(ii) Se $a < 0$, $\text{Im } f = (-\infty, y_v]$

Observação 8. Ao esboçar o gráfico de uma função quadrática, é importante saber verificar alguns elementos da parábola:

a) Concavidade ("posição" dada pelo coeficiente *a* de x^2);

b) Pontos onde o gráfico "corta" o eixo X (raízes, determinadas pela solução da equação $f(x) = 0$);

c) Ponto onde o gráfico "corta" o eixo Y (cálculo de $f(0)$, ou termo independente);

d) Vértice (ponto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$);

e) Eixo de simetria (reta $x = \frac{-b}{2a}$).

Exercício resolvido

2) Esboçar o gráfico da função quadrática
$f(x) = -2x^2 + 7x + 4$

Resolução. Temos inicialmente $a = -2$, $b = 7$ e $c = 4$.

Seguindo o roteiro acima, observamos que:

a) $a = -2 < 0$: a parábola é côncava para baixo.

b) os pontos onde o gráfico corta o eixo X são os pontos para os quais $f(x) = 0$, ou seja, as raízes da equação $-2x^2 + 7x + 4 = 0$. Vamos calculá-las.

$-2x^2 + 7x + 4 = 0$ é equivalente a $2x^2 - 7x - 4 = 0$ (multiplicamos ambos os membros por -1). Assim, $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4}$ e temos as raízes $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 4$.

Logo, os pontos onde o gráfico "corta" o eixo X são $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e $(4,0)$.

c) O ponto onde o gráfico de f corta o eixo Y é o valor de f no ponto 0, ou seja, $f(0) = -2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 4 = 4$. Assim, este ponto é $(0,4)$.

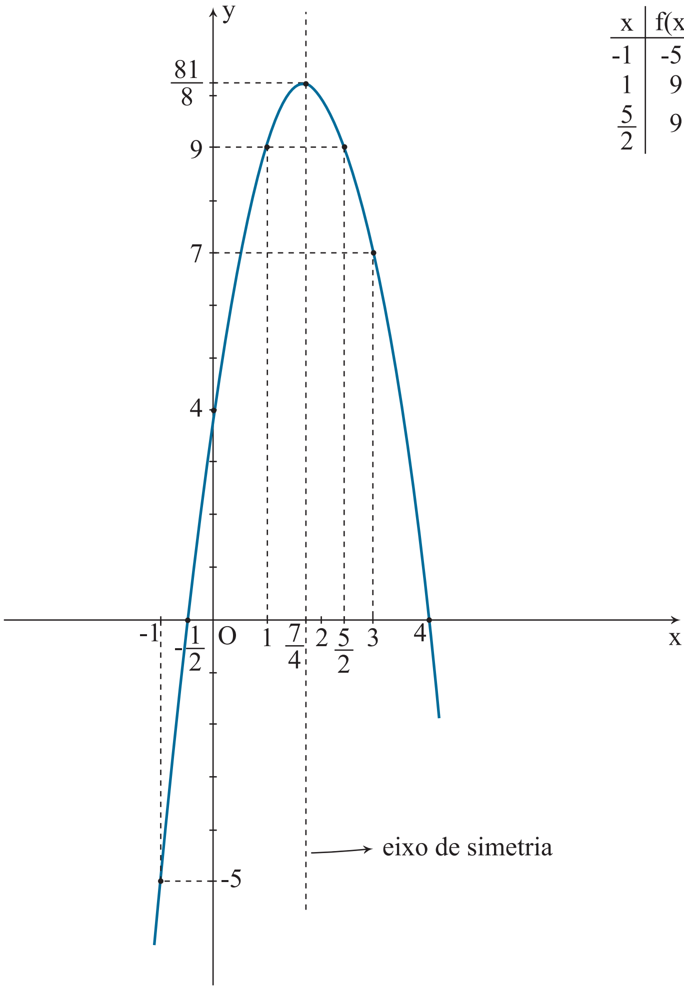
d) O vértice é dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$y_v = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(49+32)}{4 \cdot (-2)} = \frac{-81}{-8} = \frac{81}{8}$$

O vértice é o ponto $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{81}{8}\right)$.

Vamos encontrar mais alguns pontos e fazer o gráfico:



x	f(x)
-1	-5
1	9
$\frac{5}{2}$	9

Figura 5.14

Observe que a imagem da função f é o intervalo $\left(-\infty, y_v\right] = \left(-\infty, \dfrac{81}{8}\right]$, que é a projeção ortogonal de seu gráfico no eixo das ordenadas.

- **Aplicação**

A função quadrática serve de modelo para resolução de problemas de maximização e de minimização. Faremos dois exemplos de problemas cuja resolução depende da análise e interpretação do gráfico de uma função quadrática.

Problema 1) Entre todos os retângulos de perímetro 12 u.m., quais as dimensões daquele que possui maior área?

Resolução. Chamamos de x e y as dimensões do retângulo e $S = x \cdot y$ a sua área. Vamos escrever S como função de x usando o outro dado do problema, isto é, que o perímetro é 12 u.m. O perímetro é dado por $2x + 2y = 12$. Então $x + y = 6$ e $y = 6 - x$. Substituindo y na expressão da área, obtemos $S\left(x\right) = x \cdot \left(6 - x\right) = 6x - x^2$. Temos assim uma função quadrática $S(x)$ que expressa a área de um retângulo de perímetro 12 *u.m.* em função de uma de suas dimensões. Estamos procurando o valor máximo desta área, e isto significa que estamos procurando o valor máximo da função quadrática $S\left(x\right) = 6x - x^2$, ou $S\left(x\right) = -x^2 + 6x$. O gráfico de S é uma parábola *côncava para baixo*, pois $a = -1 < 0$. Assim, o valor máximo da função $S(x)$ é a ordenada do vértice da parábola. Vamos calcular a abscissa do vértice, lembrando que $a = -1$ e $b = 6$:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Este valor x que encontramos é uma das dimensões do retângulo que tem área máxima. Fazendo $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$, encontramos a outra dimensão, $y = 3$. Vemos então que o retângulo de perímetro 12 u.m. que possui a maior área é o quadrado de lado 3.

Resposta. O retângulo de perímetro 12 que possui a maior área é o quadrado de lado 3.

Problema 2) De todos os números reais x e y tais que $x + 5y = 10$, determine aqueles para os quais o valor $x^2 + y^2$ seja mínimo.

Resolução. Chamamos de M o valor que queremos minimizar, ou seja, $M = x^2 + y^2$. Vamos escrever M em função de um dos números: se $x + 5y = 10$, temos que $y = \dfrac{10 - x}{5}$ e, portanto,

$$M\left(x\right) = x^2 + \left(\frac{10 - x}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \cdot \left(26x^2 - 20x + 100\right) = \frac{26}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 4$$

M é uma função quadrática com $a = \dfrac{26}{25}$, $b = -\dfrac{4}{5}$ e $c = 4$.

Como $a > 0$, a parábola que representa o gráfico de M é côncava para cima, indicando que M tem um valor mínimo no vértice.

Vamos calcular este vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{4}{5}}{2 \cdot \frac{26}{25}} = \frac{5}{13}.$$

Calculando o valor y, obtemos $y = \frac{10-x}{5} = \frac{10-\frac{5}{13}}{5} = \frac{25}{13}$. O valor mínimo de $x^2 + y^2$ será $M = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 = \frac{650}{169} = \frac{50}{13}$.

Resposta. Os números procurados são $x = \frac{5}{13}$ e $y = \frac{25}{13}$.

Exercícios resolvidos

3) Faça o gráfico e determine o conjunto imagem da função

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{se } x < -2 \\ x^2 - 6 & \text{se } -2 \le x < 3 \\ \frac{9}{2} & \text{se } 3 \le x \le 4 \\ 2x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Resolução. A função é dada por quatro sentenças:

$-x+5$ no intervalo $(-\infty,-2)$, que é uma função afim;

x^2-6 no intervalo $[-2,3)$, que é uma função quadrática;

$\frac{9}{2}$ no intervalo $[3,4]$, que é uma função constante;

$2x$ no intervalo $(4,+\infty)$, que é uma função linear.

Fazendo o gráfico correspondente em cada intervalo, teremos:

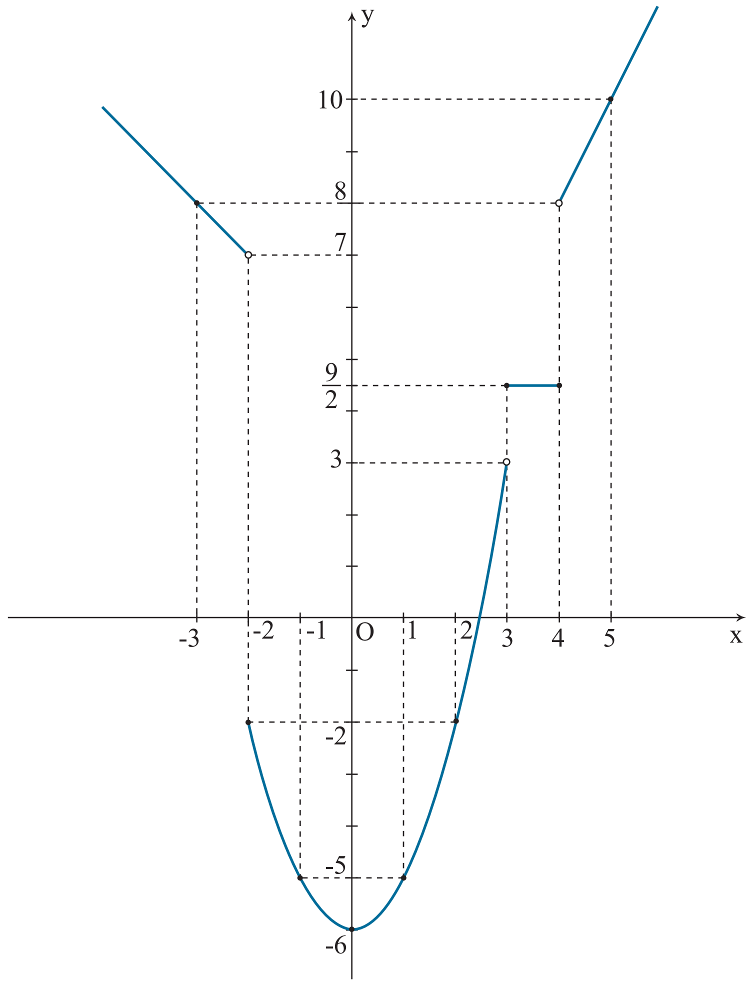


Figura 5.15

A imagem da função é a projeção ortogonal do seu gráfico no eixo das ordenadas. Assim, $\operatorname{Im} f = [-6,3) \cup \left\{\frac{9}{2}\right\} \cup (7,+\infty)$**.**

4) Esboce num mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções:

$f(x) = x^2,\ g(x) = \frac{1}{2}x^2,\ h(x) = 2x^2.$

O que você pode observar quando variamos o coeficiente *a*?

Resolução:

$f(x)=x^2$		$g(x)=\frac{1}{2}x^2$		$h(x)=2x^2$	
x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0
1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	2
- 1	1	- 1	$\frac{1}{2}$	- 1	2
2	4	2	2	2	8

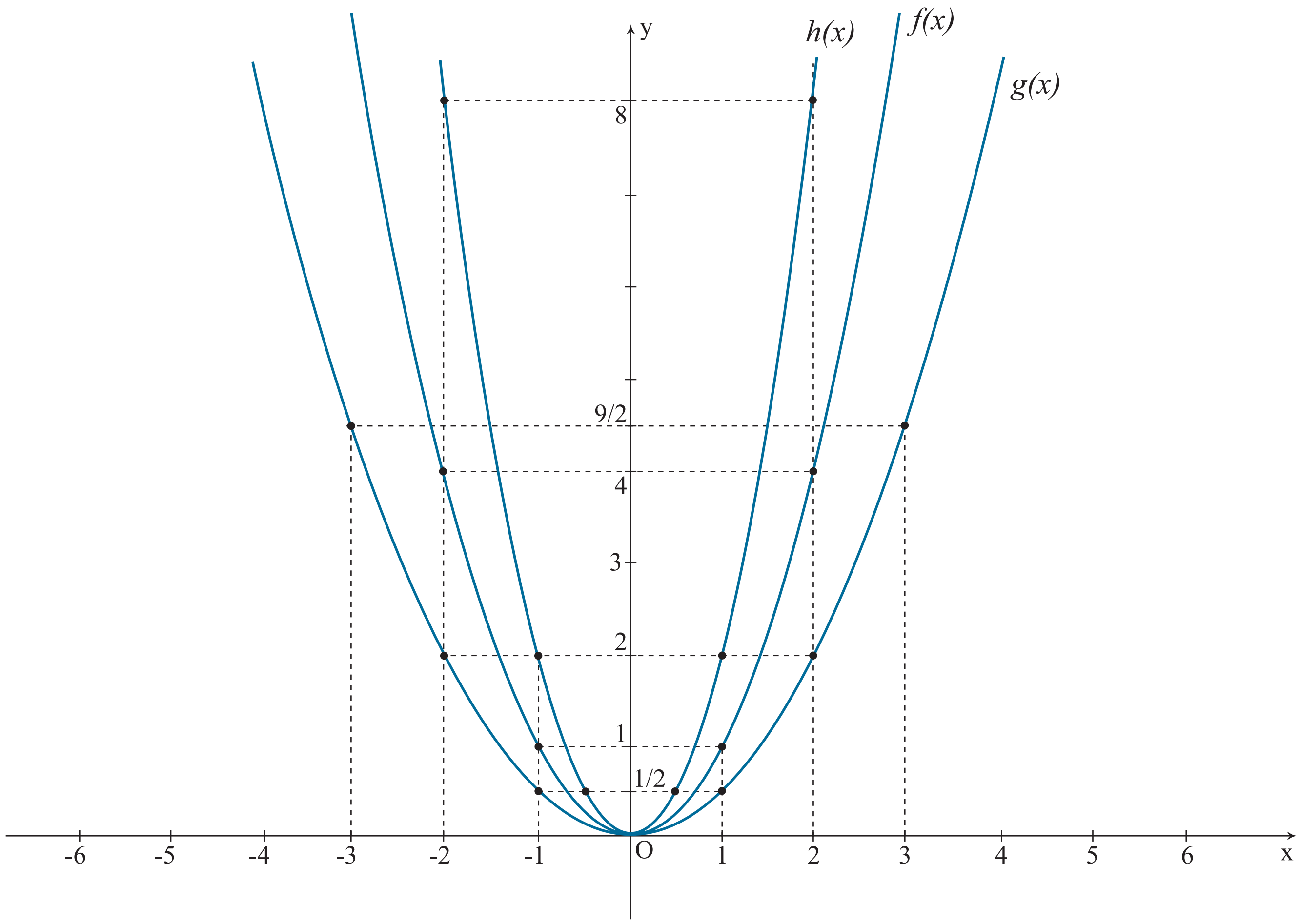


Figura 5.16

Observando o coeficiente $a > 0$, vemos que ele determina a "abertura" da parábola. Quanto menor o valor de a, maior é a "abertura".

5) Determine o maior valor de k em $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le k\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

Resolução. Vamos lembrar a definição de função injetora do capítulo 4:

Dizemos que f é injetora em A se e somente se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1)\neq f(x_2).$$

Ou, equivalentemente:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 = x_2, \text{ então } f(x_1)= f(x_2).$$

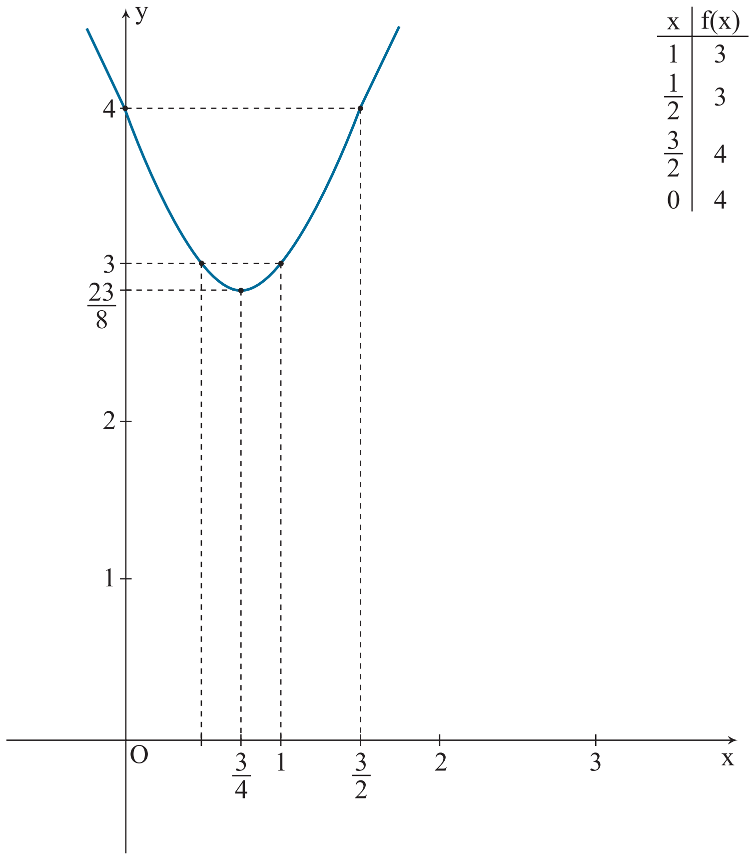
Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e que a parábola tem um *eixo de simetria* que passa pelo vértice e é paralelo ao eixo Y. Isto nos sugere que existem valores diferentes no domínio que possuem a mesma imagem. Vamos então fazer o gráfico de f como se $\mathbb{R}$ fosse seu domínio, e analisar que restrição devemos fazer neste domínio para que a função seja injetora. Seguindo o roteiro para construção do gráfico, observamos que:

a) O gráfico da função $f(x)=2x^2-3x+4$ é uma parábola côncava para cima (pois $a=2>0$).

b) Suas raízes não são números reais, pois $\Delta=9-32=-23<0$. Então o gráfico não "corta"(ou não intersecta) o eixo X e a parábola está situada acima do eixo X (por quê?).

c) O gráfico corta o eixo Y no ponto $(0,4)$.

d) O vértice tem coordenadas $x_v=\dfrac{3}{4}$, $y_v=\dfrac{23}{8}$. Conseqüentemente, a imagem da função é $\left[\dfrac{23}{8},+\infty\right)$ e o eixo de simetria passa pelo ponto $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{23}{8}\right)$.



x	f(x)
1	3
$\frac{1}{2}$	3
$\frac{3}{2}$	4
0	4

Figura 5.17

Analisando o gráfico, para que a função seja injetora, devemos considerar uma das "metades" da parábola (ou uma parte menor), determinadas pelo eixo de simetria. As projeções das "metades" no eixo X são os intervalos $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$. Como o domínio de f é $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq k\}$, ou seja, $A = (-\infty, k]$, é necessário tomar para valores de x aqueles à esquerda do vértice, ou seja, menores ou iguais do que $x_v = \frac{3}{4}$. Assim, qualquer valor de k menor ou igual a $\frac{3}{4}$ satisfaz a propriedade. O maior deles é $k = \frac{3}{4}$ e f será injetora no intervalo $A = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

Exercícios propostos

5) Estude as funções dadas abaixo, determinando raízes, vértice, pontos de intersecção com os eixos, eixo de simetria, gráfico e conjunto imagem:

a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

c) $f(x) = (3 - x)(x + 1)$

d) $f(x) = -2x^2 - 16x$

e) $f(x) = 4 - x^2$

f) $f(x) = -(3 - x)^2$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

h) $f(x) = -(4 - 3x^2)$

6) Encontre o valor *x* de modo que $f(x) = x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{2}$.

7) Determine o valor *b* em $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em *B* definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

8) A soma de dois números reais é 6. Encontre estes dois números sabendo que seu produto é máximo.

9) Em cada item a seguir, encontre a função quadrática que satisfaz as condições dadas:

a) $f(0) = 5,\ f(1) = 10,\ f(-1) = 4$.

b) o vértice do gráfico de *g* é $(1, 2)$ e *g* intercepta o eixo Y em $(0, 4)$.

c) o valor máximo de *h* é 10; o gráfico de *h* é simétrico em relação à reta $x = -1$ e *h* intercepta o eixo Y em $(0, 8)$.

d) o gráfico de t intercepta o eixo x nos valores $x=1$ e $x=3$, e intercepta o eixo Y em $(0,8)$.

10) Um restaurante "a quilo" vende 100 kg de comida por dia, a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa revelou que, para cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita?

11) Considere os conjuntos $A=\left\{x\in\mathbb{R} / x\leq\frac{1}{2}\right\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R} / x\geq -1\}$ e as funções $f:A\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ definida por $g(x)=x^2$ e $h:\mathbb{R}_+\to B$ definida por $h(x)=4x-1$. Determine a função inversa de $h\circ(g\circ f)$.

5.1.3. Funções polinomiais de modo geral

Definição. *Uma função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é uma função polinomial quando existem constantes reais* $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ *tais que* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x^1+a_0$, *com* n *natural não-nulo.*

Exemplos

17) $f(x)=13x^3-4x^2+\dfrac{78}{11}$

$a_0=\dfrac{78}{11};\ a_1=0;\ a_2=-4;\ a_3=13.$

18) $g(t)=8t^9+4\sqrt{2}t^5-t+1$

$a_0=1;\ a_1=-1;\ a_2=a_3=a_4=0;\ a_5=4\sqrt{2};\ a_6=a_7=a_8=0;\ a_9=8$

19) $h(t)=-3$; $a_0=-3$; as outras constantes são nulas.

Observação 9. A expressão $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ chama-se *polinômio* e se $a_n\neq 0$, dizemos que é um *polinômio de grau n*. O grau do polinômio (e não da função!) é então o maior valor de n para o qual a_n é diferente de zero. A função

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

é uma *função polinomial de grau n* quando $a_n\neq 0$. As funções afim e quadrática são exemplos de funções polinomiais.

Observação 10. Se todas as constantes a_0, a_1, a_2, ..., a_n são nulas, temos o *polinômio nulo*, cujo grau não está definido. Se a constante a_0 é não nula e todas as outras são nulas, temos um *polinômio de grau zero* (exemplo 19).

- **Igualdade de polinômios**

Dois polinômios $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ e $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$ são iguais quando $m = n$ e $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$. Assim, dois polinômios são iguais quando têm o mesmo grau e seus termos correspondentes são iguais.

Observação 11. É claro que a igualdade de funções vale para funções polinomiais. Duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ serão iguais quando $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isto acontece quando seus coeficientes correspondentes são iguais.

Simbolicamente, para
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$,
$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$
$f = g$ se e somente se $m = n$ e
$a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

- **Raízes de uma função polinomial**

Dizemos que s é raiz da função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ quando $f(s) = 0$, ou seja, quando $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0$. O Teorema Fundamental da Álgebra (que será estudado com detalhes posteriormente, em outra disciplina) nos diz que um polinômio de grau *n* tem exatamente *n* raízes complexas. Estas raízes não são necessariamente distintas.

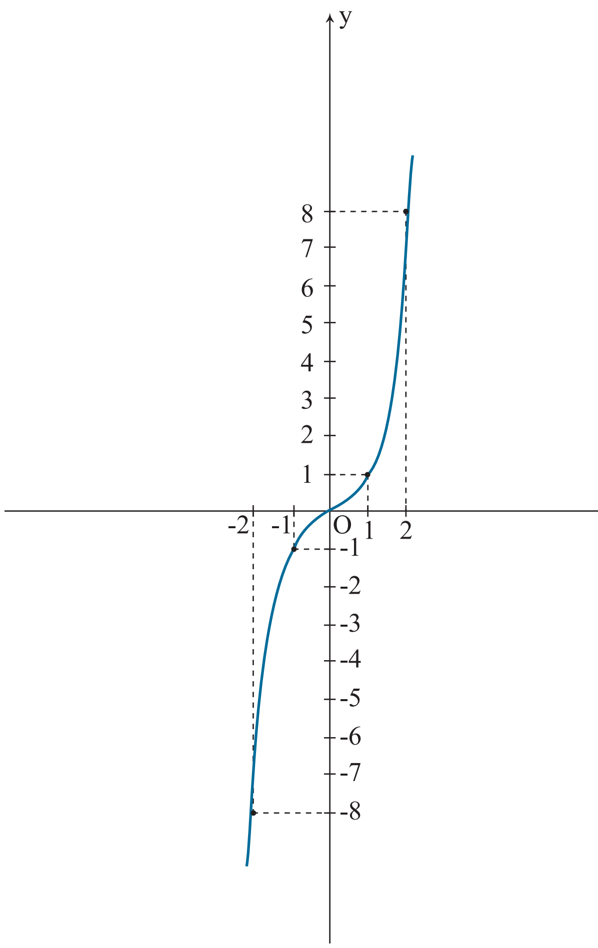
Exemplos

20) $f(x) = x^3$ possui três raízes iguais, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Diz-se neste caso que zero é uma raiz de *multiplicidade* 3.

21) $g(x) = x^5 - x^3$ possui cinco raízes reais, mas três delas são iguais. De fato, $x^5 - x^3 = 0$ implica $x^3(x^2 - 1) = 0$ e daí obtemos as raízes $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

- **Gráfico das funções polinomiais**

Conforme já foi visto, funções polinomiais de grau 0 ou 1 (funções afins) têm como gráfico uma reta e funções polinomiais de grau 2 (funções quadráticas) têm como gráfico uma parábola. Para funções polinomiais de grau maior do que 2 não existe uma tal caracterização do gráfico. O que sabemos é que as raízes determinam pontos onde o gráfico "corta" o eixo X e o "termo independente" (coeficiente a_0) determina o ponto onde o gráfico "corta" o eixo Y. Como ilustração, vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3$:



x	f(x)
0	0
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-10	-1000
1	1
2	8
3	27
10	1000
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Figura 5.18

Im $f = \mathbb{R}$ e f é crescente em seu domínio (prove!).

Observe também que
$f(1) = -f(-1)$, $f(2) = -f(-2)$, $f(3) = -f(-3)$, e de modo geral $f(x) = -f(-x)$. Isto caracteriza uma função ímpar, conforme a definição a seguir:

Definição. *Uma função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é uma* ***função par*** *quando* $f(x)=f(-x)$ *para todo x em seu domínio; a função é uma* ***função ímpar*** *quando* $f(x)=-f(-x)$ *para todo x em seu domínio.*

Exemplos

22) Como já vimos, $f(x)=x^3$ é uma função ímpar, pois $f(x)=x^3$ e $f(-x)=-x^3$, ou seja, $f(x)=-f(-x)$.

23) $f(x)=x^2+1$ é uma função par, pois
$f(x)=x^2+1$ e $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$, ou seja,
$f(x)=f(-x)$.

Observação 12. Funções pares e ímpares têm características importantes em seus gráficos:

(i) o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Y: (x, y) e (-x, y) são pontos do gráfico da função, para todo *x* do domínio.

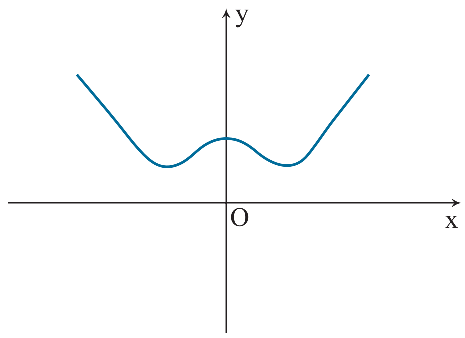


Figura 5.19: Gráfico de uma função par

(ii) o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do plano cartesiano: (x, y) e (-x, -y) são pontos do gráfico da função, para todo *x* do domínio.

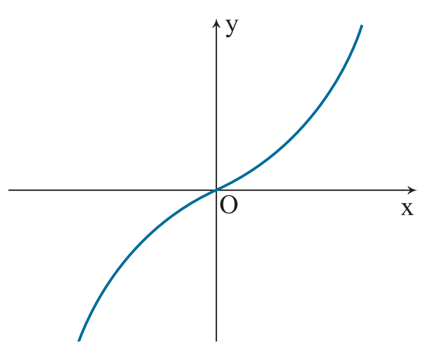


Figura 5.20: Gráfico de uma função ímpar

Exercícios propostos

12) Esboce o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 1$ e $f(x) = x^3 - 1$. O que você pode observar?

13) O gráfico abaixo é o gráfico de uma função polinomial de grau 3. Determine a função.

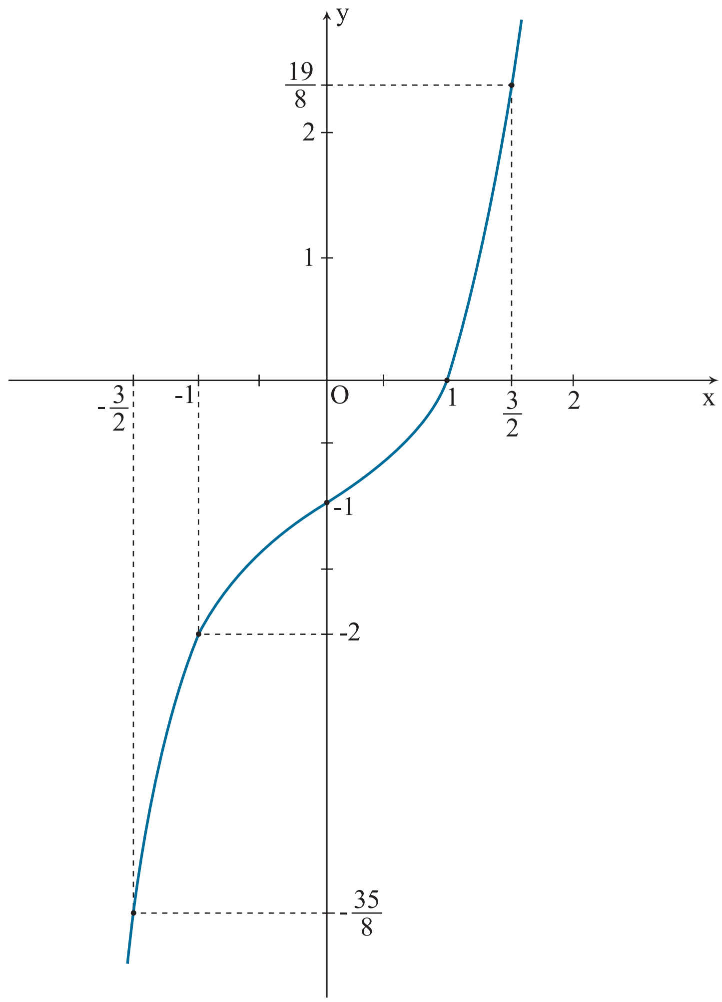


Figura 5.21

5.2 Funções racionais

As funções racionais são as funções da forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo P e Q funções polinomiais.

Para f estar definida, o denominador deve ser diferente de zero;

o denominador será zero quando $Q(x)=0$, ou seja, nas raízes da função polinomial $Q(x)$. Assim, o domínio de *f* é o conjunto $\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}/Q(x)=0\}$.

Exemplos

24) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$; o domínio de *f* será $\mathbb{R}$ pois a função polinomial que aparece no denominador não se anula (não tem raízes reais): $D(f)=\mathbb{R}$.

25) $g(x)=\dfrac{1}{x+3}$; $D(g)=\mathbb{R}-\{-3\}$, uma vez que -3 é raiz da função polinomial $Q(x)=x+3$.

26) $h(x)=\dfrac{4x^3-x+1}{x^3-x}$; para determinarmos o domínio de *h* devemos verificar para quais valores de *x* a função polinomial $Q(x)=x^3-x$ se anula, ou seja, devemos calcular as raízes de $Q(x)$:

$$x^3-x=0$$
$$x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1.$$

Então teremos $D(h)=\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$.

27) $K(x)=\dfrac{2}{x^4-x^2+5x-3}$; neste caso não é tão simples determinar o domínio. Não sabemos como calcular, através de uma fórmula, as raízes de uma função polinomial deste tipo. Para determinar o domínio da função K, devemos usar métodos mais elaborados de cálculo de raízes através de aproximações. Você estudará estes métodos após as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Observação 13. Para as funções polinomiais de grau 4 do tipo $h(x)=ax^4+bx^2+c$, isto é com os coeficientes de x^3 e x iguais a zero, podemos calcular as raízes usando uma mudança de variável, isto é, fazendo $x^2=y$ (conseqüentemente $x^4=y^2$) e construindo uma nova função $h_1(x)=ay^2+by+c$. As raízes de h_1 irão determinar as raízes de *h*.

Exemplo

28) Determinar as raízes de $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Resolução: Fazendo a mudança de variável, $x^2 = y$, obtemos $h_1(x) = y^2 - 5y + 4$. Para $h_1(y) = 0$, temos $y^2 - 5y + 4 = 0$ (uma equação do segundo grau) e as raízes são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Como $x^2 = y$, fazemos $x^2 = 1$ e $x^2 = 4$; resolvendo estas equações, temos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = -2$. Estas são as raízes da função $h(x)$.

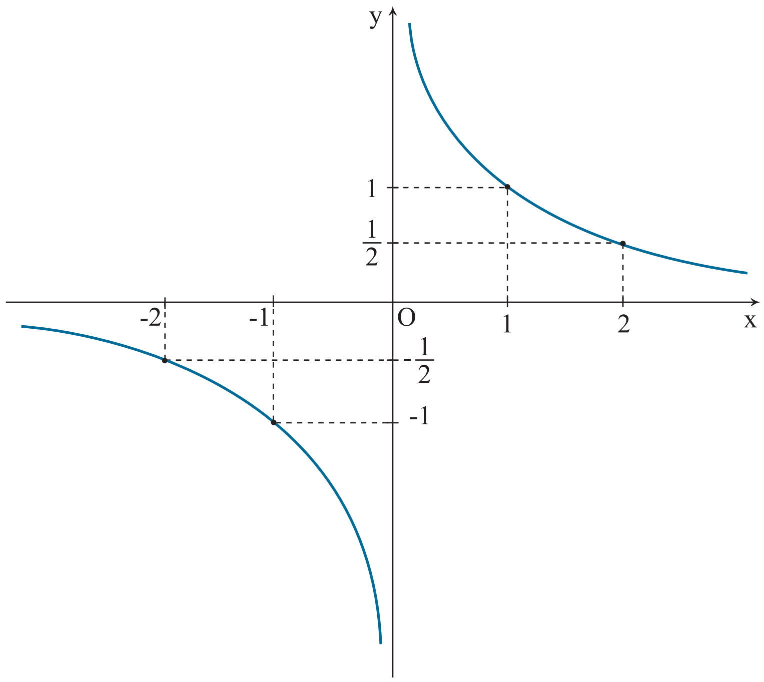
As equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ são chamadas *equações biquadradas*.

- **Gráfico das funções racionais**

Não é possível fazer generalizações sobre o gráfico destas funções. Mas é possível verificar algumas regularidades nos gráficos das funções racionais. Vejamos:

Exemplos

29) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$



x	f(x)
1	1
-1	-1
2	$\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}$

Figura 5.22

Note que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é uma função ímpar (prove!). Para $x>0$, à medida que x se aproxima de zero, o valor da função "aumenta" (quanto menor o denominador, maior a fração). Por outro lado, à medida que $x>0$ assume valores cada vez maiores, o valor da função se aproxima de zero.

Tarefa

O que acontece à esquerda do eixo Y?

Exemplos

30) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

x	f(x)
0	$-\frac{1}{2}$
1	-1
$\frac{3}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	2
10	$\frac{1}{8}$
-10	$-\frac{1}{12}$

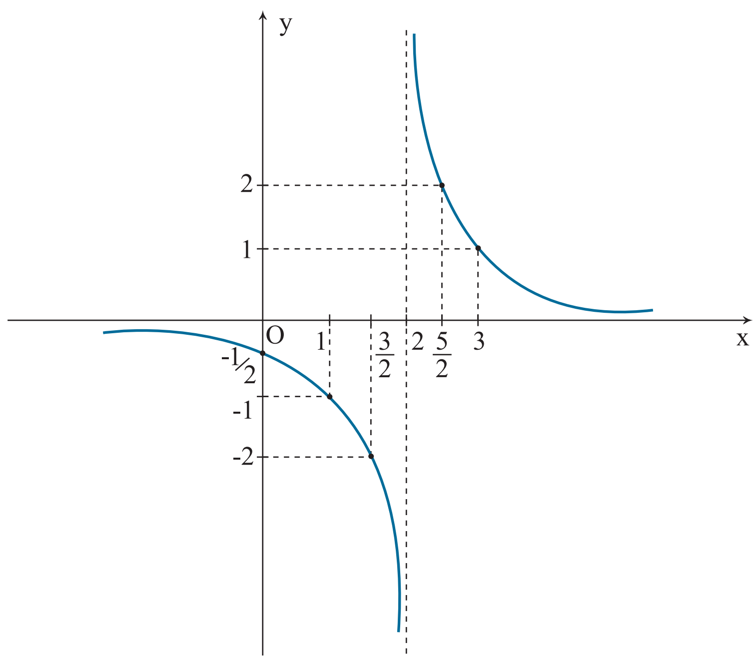
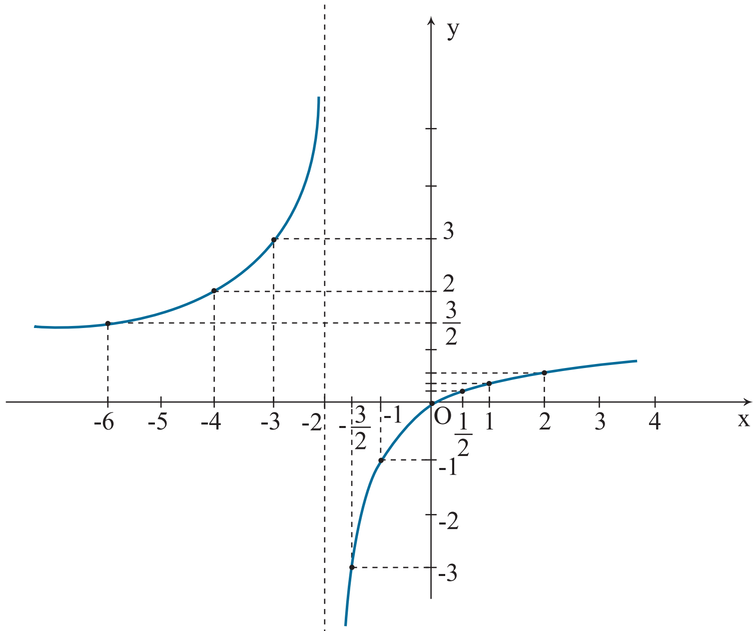


Figura 5.23

Note a semelhança do gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ com o gráfico da função do exemplo anterior. O gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ pode ser obtido pelo deslocamento horizontal (de duas unidades) do gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

31) $f(x)=\dfrac{x}{x+2};\ D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

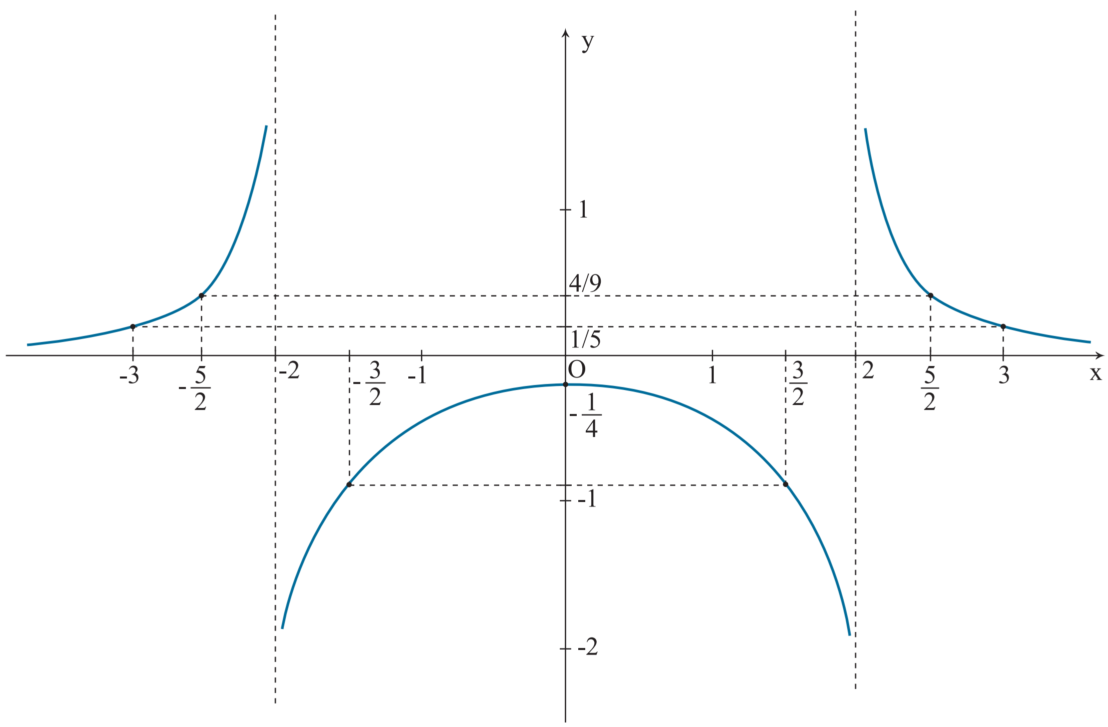


x	f(x)
0	0
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$
-1	-1
-3	3
-4	2
-6	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
$-\frac{3}{2}$	-3

Figura 5.24

Observe, também neste exemplo, a semelhança com os gráficos dos exemplos anteriores.

32) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4};D(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$



x	f(x)
0	$-\frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
-3	$\frac{1}{5}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{9}$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{9}$

Figura 5.25

Note que este gráfico difere dos anteriores; observe a função que aparece no denominador.

Exercícios propostos

14) Dê o domínio e faça o gráfico das funções racionais:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

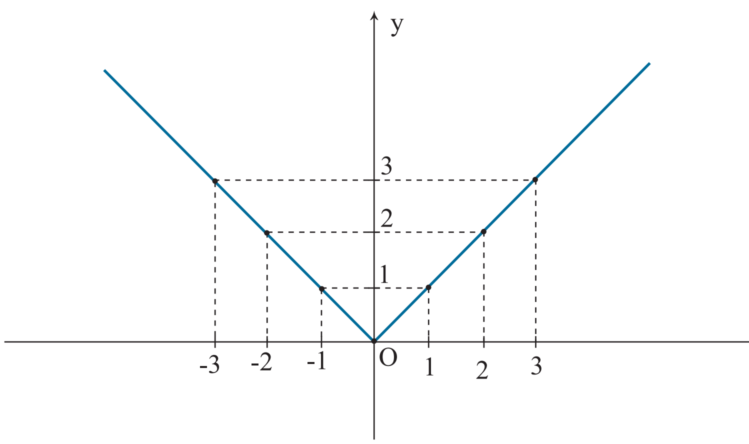
c) $h(x)=1+\dfrac{1}{x-3}$

15) Dê os intervalos de crescimento e decrescimento das funções do exercício anterior.

5.3 Função-módulo

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$ é chamada "função-módulo". Lembrando a definição de módulo, $|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$, temos $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$.

O gráfico de f será:



x	f(x)
1	1
-1	1
2	2
-2	2
0	0

Figura 5.26

Observando o gráfico, vemos que $\operatorname{Im} f=[0,+\infty)$.

Exemplos de função-módulo composta com outras funções:

33) $f(x) = |3x - 6|$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } 3x - 6 \geq 0 \\ -(3x - 6) & \text{se } 3x - 6 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

$$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3x - 6 < 0 \Rightarrow 3x < 0 \Rightarrow x < 2$$

Assim, a função *f* pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x + 6 & \text{se } x < 2 \end{cases}.$$

O gráfico de *f* é:

x	f(x)
2	0
1	3
3	3
4	6
-1	9

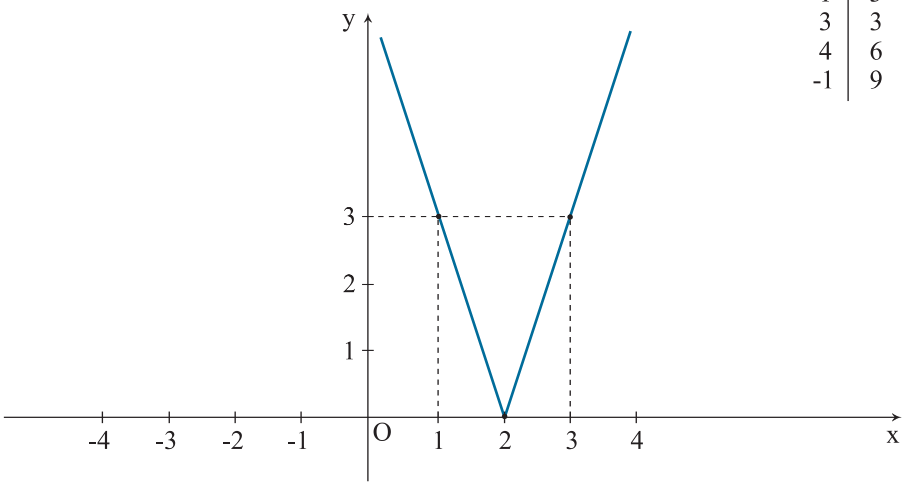


Figura 5.27

Observamos pelo gráfico que $\text{Im } f = [0, +\infty)$.

34) $g(x) = |x^2 - 5|$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x^2 - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 5 & \text{se } x^2 - 5 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

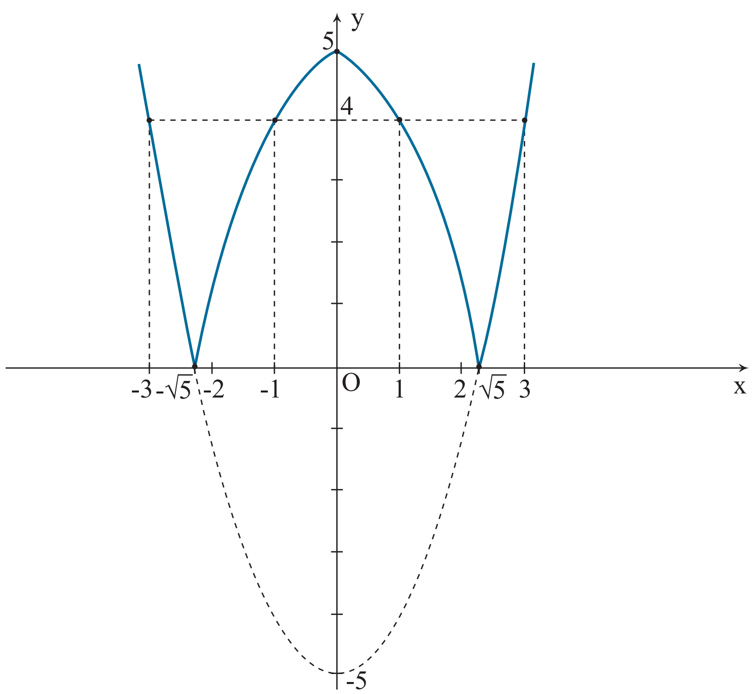
$$x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{5} \ \text{ ou } \ x \leq -\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

A função *g* pode ser escrita como

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } \ x \geq \sqrt{5} \ \text{ ou } \ x \leq -\sqrt{5} \\ -x^2 + 5 & \text{se } \ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

O gráfico de *g* é:



x	f(x)
$\sqrt{5}$	0
$-\sqrt{5}$	0
3	4
-3	4
-1	4
1	4

Figura 5.28

Observe a diferença do gráfico de *g* com o gráfico de $h(x) = x^2 - 5$. No gráfico da função *g* a parte correspondente aos valores entre as raízes de *h* foi "rebatida" para a parte positiva do plano (acima do eixo X).

Observação 14. O gráfico de uma função-módulo estará sempre acima do e/ou sobre o eixo X.

Exercícios propostos

16) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = |4 - 2x|$

b) $g(x) = 1 + x + |x| + |x^2 - 2|$

c) $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$

17) Dê o domínio e construa o gráfico da função:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{-x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 2}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.4 Funções Trigonométricas

Vamos inicialmente estudar alguns conceitos básicos necessários à compreensão das funções trigonométricas: arco de circunferência, medidas de arcos, ângulo central e arcos côngruos.

Todos estes conceitos foram trabalhados nos cursos de Geometria I e II. É conveniente que você tenha bastante clareza destes para prosseguir neste estudo. Se você tem dúvidas, volte àqueles materiais e aprofunde seus conhecimentos. Aqui será apresentada uma revisão sucinta destes conceitos e sua operacionalização.

- **Arco de circunferência**

Considere uma circunferência qualquer e nela fixe um ponto A.

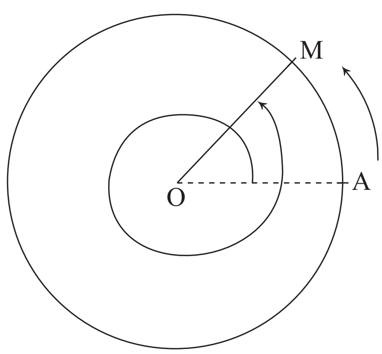


Figura 5.29

Suponha que um ponto móvel desloque-se sobre a circunferência a partir de *A*, sempre no mesmo sentido, até parar no ponto *M*.

O caminho percorrido pelo ponto é o *arco* $\overset{\frown}{AM}$. Dizemos que $\overset{\frown}{AM}$ é um "arco de circunferência".

Pergunta: como medimos este arco? (lembre-se de suas disciplinas de geometria!)

Você já se perguntou por que foi feita a divisão em 360 partes e não em 100, por exemplo? A origem dessa escolha é histórica, pois foi criada inicialmente pelos babilônios e também por povos pré-colombianos das Américas (Incas, Maias...), que utilizavam um sistema de numeração com base sexagesimal. Outra explicação é o estabelecimento de uma relação com o chamado movimento de Translação da Terra em torno do Sol, que alguns povos acreditavam se completar em 360 dias.

- **Medidas de arcos**

São usadas basicamente duas medidas de arcos: o grau, que você já conhece e é usado há milênios, e o radiano, que você também conhece, unidade que vamos usar em nosso estudo das funções trigonométricas.

Grau: uma circunferência é dividida em 360 partes iguais; cada uma dessas partes é um arco que mede 1 grau. Assim, a circunferência toda mede 360 graus e um arco de x graus corresponde a $\frac{x}{360}$ da circunferência (veja a figura 5.30). Denotamos x graus por x^{o} .

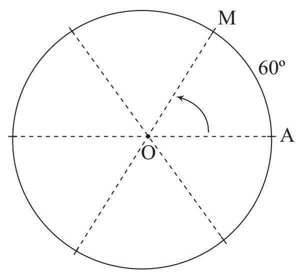


Figura 5.30

Radiano: diz-se que um arco mede um radiano se seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém (pense que você pode "esticar" o arco e colocá-lo sobre uma régua). A notação para radiano é rad e um radiano corresponde a aproximadamente 57,296 graus.

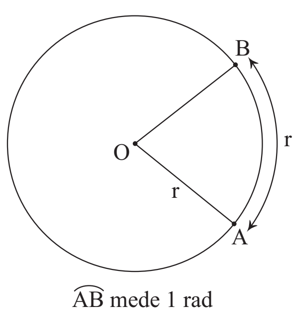


Figura 5.31

Exemplos

35)

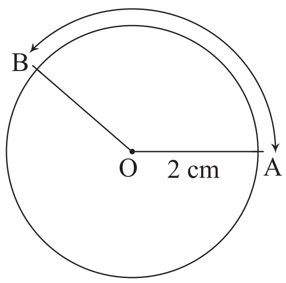


Figura 5.32

A circunferência tem raio de 2 cm e $\overset{\frown}{AB}$ mede 2 radianos; seu comprimento em centímetros é 4.

Observação 15. A *medida do arco* é em rad, mas seu *comprimento* pode ser medido em qualquer unidade de comprimento, por exemplo, em centímetros!

36)

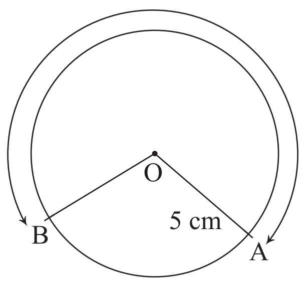


Figura 5.33

Os pontos A e B determinam um arco de 3 rad sobre a circunferência de raio 5 cm; o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 15 cm.

- **Relação entre grau e radiano**

Sabe-se que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ (se "esticarmos" a circunferência de raio r sobre uma régua, obtemos a medida de $2\pi r$ na unidade de comprimento do raio). A medida do arco correspondente à circunferência toda é então 2π rad, uma vez que cada arco de comprimento r mede 1 rad. Mas o arco correspondente à circunferência toda também mede 360°, então 360° correspondem a 2π rad ou 180° correspondem a π rad.

Didaticamente é importante que seus alunos percebam o porquê da correspondência entre o arco de 180° e sua medida em radianos (π rad), senão os estudantes apenas acreditarão e memorizarão esta informação, sem perceber o que significa. Conseqüentemente, terão dificuldade em operar com ela.

Para expressarmos os graus em radianos ou os radianos em graus fazemos uma regra de três.

Exemplos

37) Expresse 135º em radianos.

$$180^\circ ------ \pi \text{ rad}$$
$$135^\circ ------ y$$
$$y = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

38) Expresse $\frac{\pi}{6}$ em graus.

$$180^\circ ------ \pi \text{ rad}$$
$$z -------- \frac{\pi}{6}$$
$$z = \frac{180 \times \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^\circ$$

Exercício proposto

18) Expresse em radianos:

a) 90º

b) 60º

c) 45º

d) 270º

e) 120º

Ângulo central

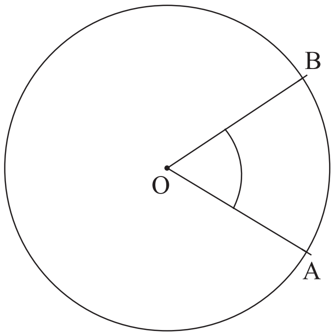


Figura 5.34

Seja O o centro da circunferência e A e B pontos sobre ela. As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ determinam o ângulo $A\hat{O}B$. Por definição, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ (em graus ou radianos).

Observação 16. Note que na figura 5.35 a seguir os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma *medida* (em graus ou radianos), mas não têm o mesmo *comprimento.*

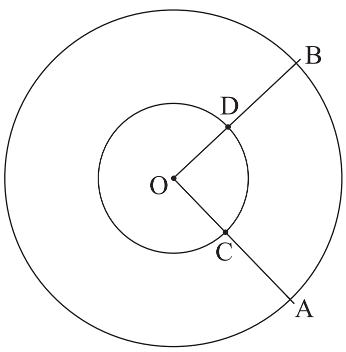


Figura 5.35

Isto acontece porque a medida de um arco independe do "tamanho" da circunferência, ou seja, do seu raio. Já o comprimento do arco depende do raio da circunferência que o contém.

Exemplo

39) Calcule o comprimento L do arco correspondente a um ângulo central de 60°, em uma circunferência de raio 10 cm.

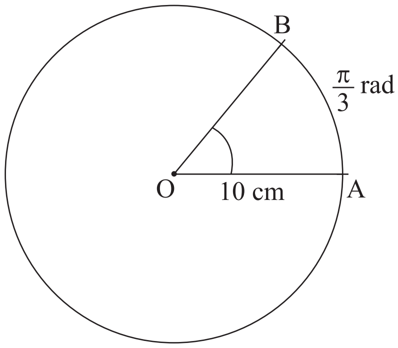


Figura 5.36

Note que a medida de arco que se relaciona com o comprimento é o radiano: um arco mede 1 rad quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém. $60°$ corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

A cada 1 radiano corresponde uma medida do raio, ou seja, 10 cm. A $\dfrac{\pi}{3}$ rad corresponderá $\dfrac{\pi}{3} \times 10 = \dfrac{10\pi}{3}$ cm, ou aproximadamente 10,46 cm (lembre-se que π é um número real, irracional, com representação decimal 3,1415926535... Em geral usaremos para π a aproximação 3,14).

- **Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica**

Alguns autores chamam de círculo trigonométrico, como você deve ter estudado em Geometria II.

Em trigonometria convencionou-se estabelecer uma orientação sobre a circunferência, fixando nela um sentido de percurso. O ciclo trigonométrico é a circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano XOY, orientada a partir do ponto $(1,0)$. O sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é horário. O ciclo trigonométrico é o "lugar" onde faremos nosso estudo das funções trigonométricas.

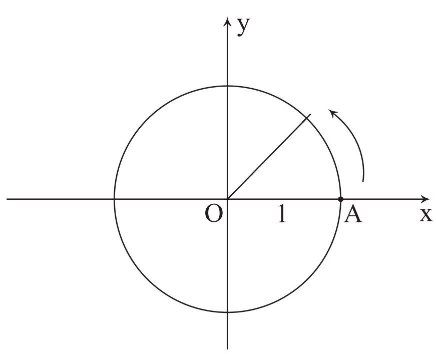


Figura 5.37

Marcamos os arcos no ciclo trigonométrico a partir do ponto $A=(1,0)$, em sentido positivo ou negativo. Veja em seguida os exemplos dos arcos de $\frac{\pi}{4}$ rad e de $-\frac{\pi}{4}$ rad no ciclo trigonométrico:

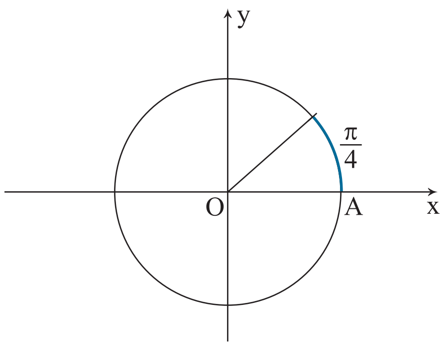


Figura 5.38: Arco de $\frac{\pi}{4}$ rad

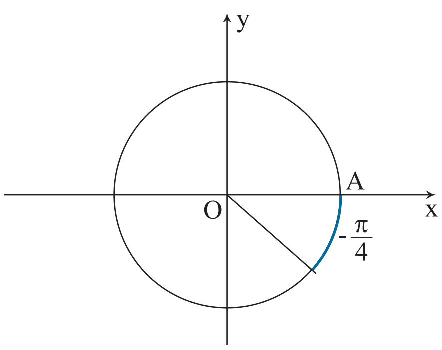


Figura 5.39: Arco de $-\frac{\pi}{4}$ rad

No ciclo trigonométrico o *comprimento* de um arco é igual ao *módulo de sua medida* em radianos. Se α é a medida do arco em radianos (α pode ser negativo!) e L é o seu comprimento, vimos que $L=|\alpha|\cdot r$ (exemplo 39). Como $r=1$, teremos $L=|\alpha|$.

Exemplo

40) A medida do arco em radianos é $\frac{\pi}{4}$; como o raio é 1, seu comprimento é $\frac{\pi}{4}$ unidades de comprimento. O arco de medida $-\frac{\pi}{4}$ tem o mesmo comprimento.

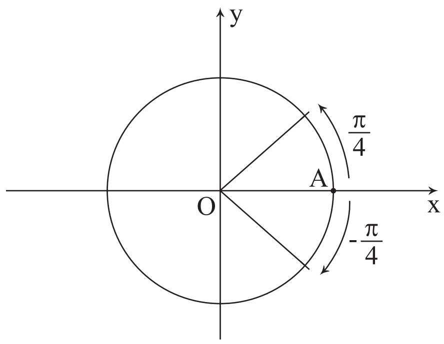


Figura 5.40

- **Quadrantes**

O ciclo trigonométrico tem quatro quadrantes, numerados também a partir do ponto $(1,0)$:

Quadrante I: de 0° ou 0 rad a 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad.
Quadrante II: de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad a 180° ou π rad.
Quadrante III: de 180° ou π rad a 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad.
Quadrante IV: de 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad a 360° ou 2π rad, fechando o círculo.

Veja a figura:

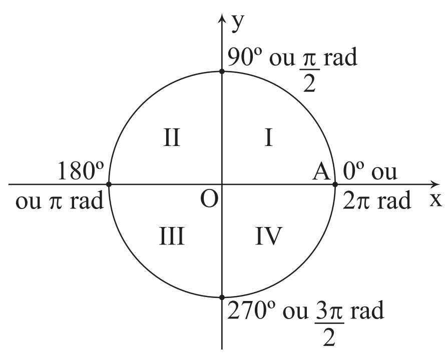


Figura 5.41

Exercício resolvido

6) Localizar no ciclo trigonométrico o arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

Resolução. Note que um arco de medida $\frac{3\pi}{4}$ rad corresponde a 3 arcos sucessivos de $\frac{\pi}{4}$ rad, isto é, $\frac{3\pi}{4} = 3 \times \frac{\pi}{4}$. Como a circunferência mede 2π, um arco de $\frac{\pi}{4}$ corresponde a um oitavo da circunferência: $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Assim, o arco de medida $\frac{3\pi}{4}$ corresponde a três oitavos da circunferência. Veja a figura:

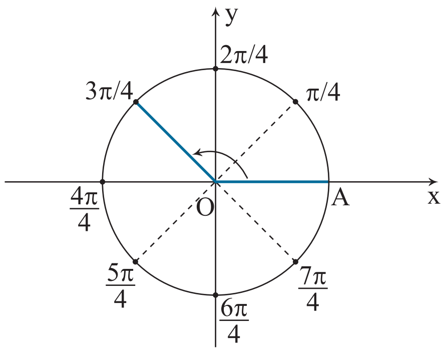


Figura 5.42

Exercícios propostos

19) O ciclo trigonométrico foi dividido em oito partes iguais. Localize sobre ele a extremidade B do arco $\overset{\frown}{AB}$, sendo dada a medida deste arco:

a) 135º

b) – 180º

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $-\frac{\pi}{2}$ rad

e) $-\frac{3\pi}{4}$ rad

20) Localize no ciclo trigonométrico a extremidade B dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ de medida:

a) 120º

b) 330º

c) $-\dfrac{11\pi}{6}$ rad

d) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad

e) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad

- **Arcos côngruos**

Suponha que um ponto móvel (como na definição de arco) desloque-se sobre a circunferência a partir de $(1,0)$, sempre no mesmo sentido, até parar em $\dfrac{\pi}{4}$. Temos duas possibilidades: o ponto pára em $\dfrac{\pi}{4}$ assim que o atinge ou o ponto dá certo número de voltas na circunferência antes de parar em $\dfrac{\pi}{4}$. Observe na figura 5.43 que o arco de $\dfrac{\pi}{4}$ rad tem a mesma extremidade que os arcos $\dfrac{\pi}{4}+2\pi$ rad, $\dfrac{\pi}{4}+4\pi$ rad, $\dfrac{\pi}{4}+6\pi$ rad,... , $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,... para todo inteiro k. Os valores negativos de *k* também produzem arcos de mesma extremidade que $\dfrac{\pi}{4}$, resultantes do movimento em sentido horário (sentido negativo): $\dfrac{\pi}{4}-2\pi$ rad, $\dfrac{\pi}{4}-4\pi$ rad, $\dfrac{\pi}{4}-6\pi$ rad...

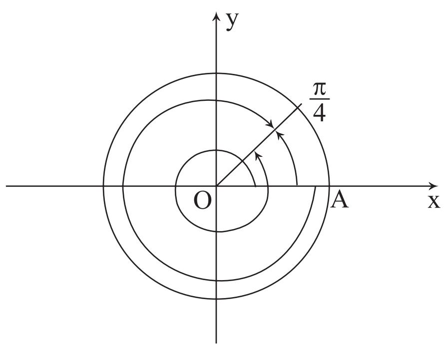


Figura 5.43

Genericamente, se B é a extremidade de um arco de α rad, então B é a extremidade de todos os arcos $\alpha + 2k\pi$ rad, para todo k inteiro. Dois arcos são *côngruos* quando têm a mesma extremidade, isto é, diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π. Para medidas em graus, dois arcos são côngruos quando têm a mesma extremidade e diferem entre si por um múltiplo inteiro de 360^o. Percebemos assim que quando marcamos a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico, estamos na verdade marcando a extremidade de uma infinidade de arcos. Chamamos de *primeira determinação positiva* (abreviamos pdp) de um arco de medida α rad ao arco côngruo a α cuja medida é β, com $0 \le \beta \le 2\pi$. Para medidas em graus, a primeira determinação positiva (pdp) de um arco de x^o é o arco côngruo a x cuja medida é y para $0 \le y \le 360^o$.

Côngruo é um termo derivado da palavra congruente que, matematicamente, refere-se a objetos de mesma medida.

Como exemplo, vamos encontrar a pdp do arco de medida $\frac{20\pi}{7}$. Procuramos o maior múltiplo de 7 menor do que 20. Como $20 = 2 \times 7 + 6$, este múltiplo é 14 e podemos escrever

$$\frac{20\pi}{7} = \frac{(14+6)\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = 2\pi + \frac{6\pi}{7}.$$

Você lembra do Algoritmo da Divisão, estudado em Fundamentos I?

Como $0 \le \frac{6\pi}{7} \le 2\pi$, e os arcos de medidas $\frac{20\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$ diferem de um múltiplo inteiro 2π (pois $\frac{20\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 2\pi$), a pdp de $\frac{20\pi}{7}$ será $\frac{6\pi}{7}$.

Exercícios resolvidos

7) Encontrar a pdp do arco de medida $\frac{47\pi}{6}$.

Resolução. Como $47 = 7 \times 6 + 5$, escrevemos:

$$\frac{47\pi}{6} = \frac{(42+5)\pi}{6} = 7\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Note que 7π não é um múltiplo de 2π; neste caso fazemos $7\pi = 6\pi + \pi$. Então:

$$7\pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \frac{11\pi}{6}$$

Assim, $\frac{47\pi}{6}-\frac{11\pi}{6}=6\pi$, o que significa que os arcos de medida $\frac{47\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ diferem por um múltiplo inteiro de 2π. Também $0\le\frac{11\pi}{6}\le 2\pi$. A pdp será então $\frac{11\pi}{6}$. Veja a figura:

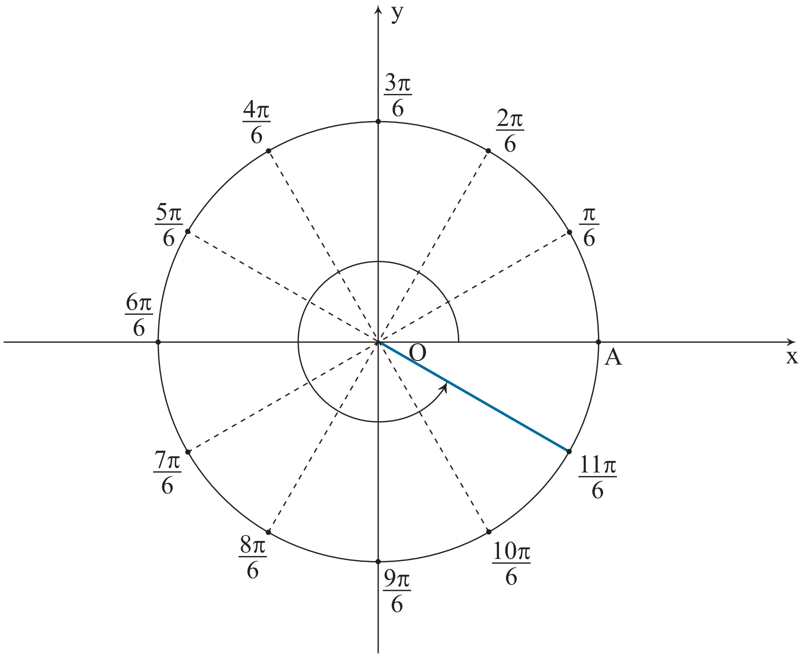


Figura 5.44

8) Encontre a pdp do arco de medida 465º.

Resolução. 465 é maior do que 360; logo, este arco tem mais de uma volta.

Como $465=1\times360+105$, a pdp do arco de medida 465º será 105º. Veja a figura:

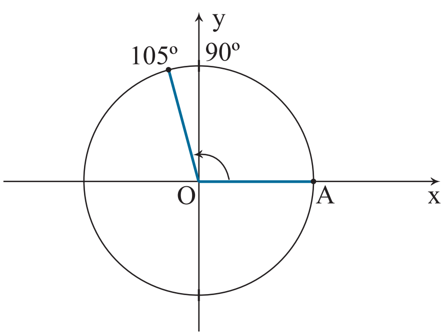


Figura 5.45

Exercícios propostos

21) Determinar a pdp dos arcos cujas medidas são:

a) $\dfrac{17\pi}{4}$

b) $-\dfrac{43\pi}{8}$

c) 615°

d) -1330°

22) Dê a medida de três arcos cuja pdp é $\dfrac{4\pi}{5}$.

23) Dê a medida de três arcos cuja pdp é 120°.

5.4.1 Função seno e função cosseno

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

O objetivo inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e o seu prolongamento, que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o *status* de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, além de $\cos\alpha$, cosseno do ângulo α, tem-se também $\cos x$, o cosseno do número real x, isto é, a função

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Analogamente há também as funções seno, tangente, cotangente, secante e cossecante, completando as *funções trigonométricas.*

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso, são especialmente adequadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Quando se opera com números $\text{sen}\, x$, $\cos x$ e $\text{tg}\, x$ no triângulo retângulo, x representa a medida de um ângulo agudo. Vamos estender as noções de seno, cosseno, tangente, cotangente secante e cossecante de x para o caso em que x representa a medida de um ângulo qualquer. Nesta situação usaremos como medida o radiano.

Seja x um número real e considere no ciclo trigonométrico o ponto P tal que o arco $\overset{\frown}{AP}$ tenha medida x rad. Este ponto P é determinado quando "enrolamos" o segmento de comprimento x no ciclo trigonométrico a partir do ponto A. Se x é positivo, este procedimento é no sentido anti-horário; se x é negativo, o sentido é horário. Os valores seno e cosseno de x são as coordenadas do ponto P. Veja a figura:

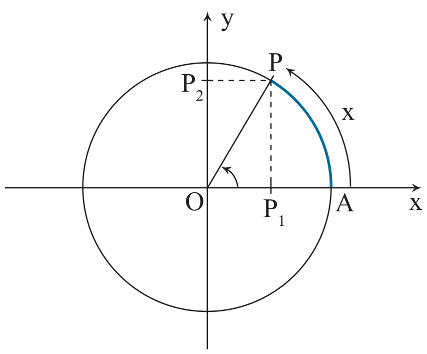


Figura 5.46

Podemos então definir:

Definição. *O seno do ângulo de medida x rad ou o seno do número real x (ou do arco* $\overset{\frown}{AP}$ *) é a ordenada do ponto P; o cosseno do número real x (ou do arco* $\overset{\frown}{AP}$ *) é a abscissa do ponto P. Como as coordenadas de um ponto são únicas, ficam definidas as funções seno e cosseno:*

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{sen}\, x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Na figura 5.46, $\text{sen}\, x = \overline{OP_2}$ e $\cos x = \overline{OP_1}$.

- **Domínio e Imagem das funções seno e cosseno**

O domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais: a *todo número real x* podemos associar um ponto P no ciclo trigonométrico e este ponto P terá duas coordenadas: a ordenada (marcada no eixo Y) será $\operatorname{sen} x$ e a abscissa (marcada no eixo X) será $\cos x$.

Como estas coordenadas estão limitadas pelo ciclo trigonométrico, a imagem das funções seno e cosseno é o intervalo $[-1,1]$.

- **Relação fundamental**

Decorre do Teorema de Pitágoras que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x real. De fato, é só considerar o triângulo retângulo OP_1P. Os segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{P_1P}$ que correspondem a $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, respectivamente, são os catetos; o segmento $\overline{OP}$ é a hipotenusa. Veja a figura:

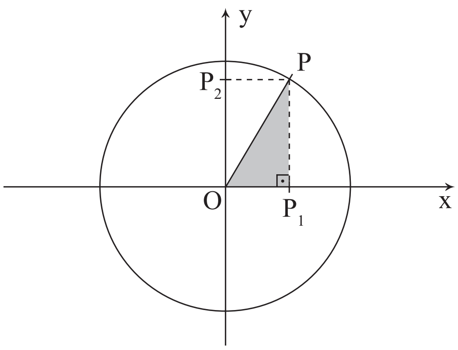


Figura 5.47

Observando o ciclo trigonométrico, podemos determinar alguns valores das funções seno e cosseno:

$\operatorname{sen} 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
$\operatorname{sen} \pi = 0$	$\cos \pi = -1$
$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

- **Sinal algébrico do seno e cosseno de x**

Na figura a seguir (5.48) apresentamos as possíveis posições de um ponto M no ciclo trigonométrico, de modo que o arco $\overset{\frown}{AM}$ tenha medida x, dependendo dos valores reais de x:

(i) M_1 está no primeiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_1: seno e cosseno de x_1 são positivos.

(ii) M_2 está no segundo quadrante e corresponde ao arco de medida x_2: seno de x_2 é positivo e cosseno de x_2 é negativo.

(iii) M_3 está no terceiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_3: seno e cosseno de x_3 são negativos.

(iv) M_4 está no quarto quadrante e corresponde ao arco de medida x_4: seno de x_4 é negativo e cosseno de x_4 é positivo.

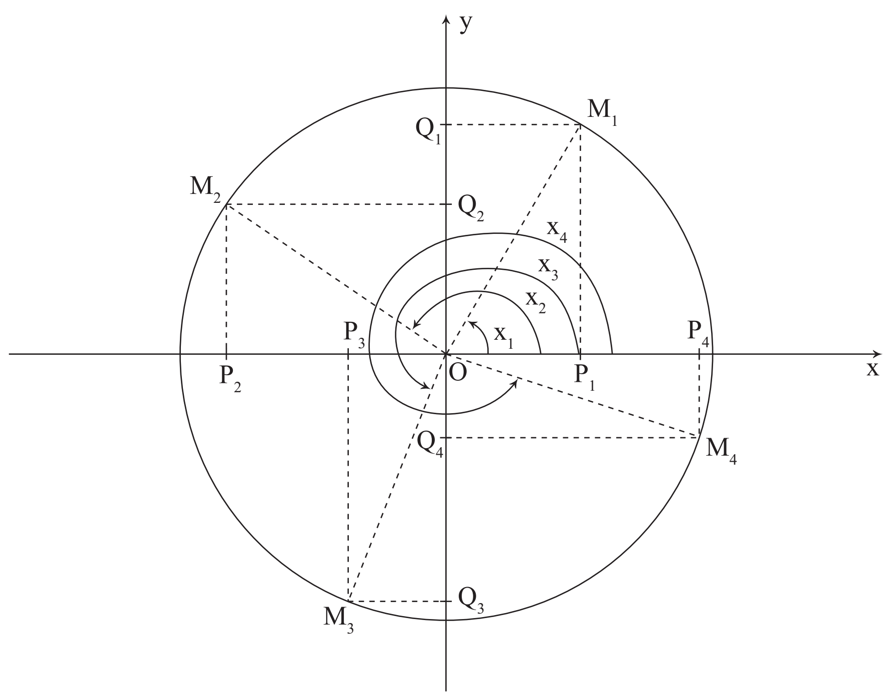
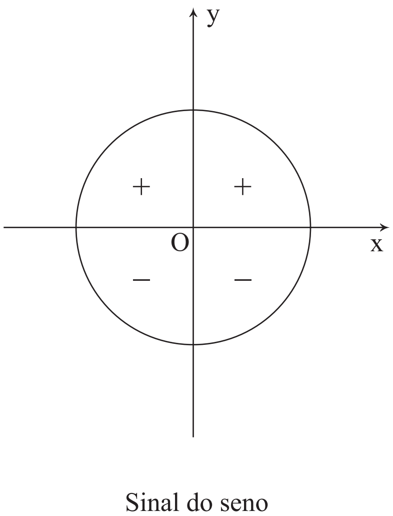


Figura 5.48

A figura 5.49 dá um resumo dos sinais algébricos dos valores de seno e cosseno nos quatro quadrantes:



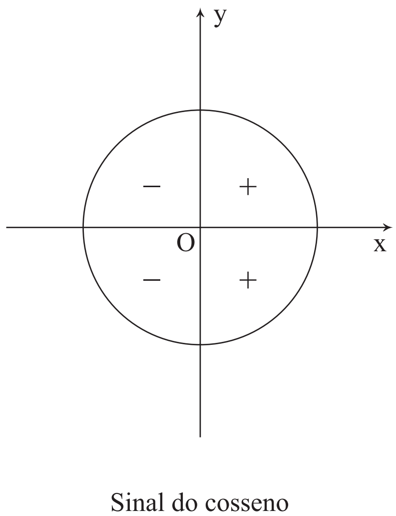


Figura 5.49

- **Seno e cosseno de arcos côngruos**

Quanto vale $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}$? E $\cos\frac{7\pi}{2}$?

Como $\frac{7\pi}{2}$ é maior do que 2π, tomamos sua primeira determinação positiva (pdp): $\frac{7\pi}{2}=\frac{4\pi+3\pi}{2}=2\pi+\frac{3\pi}{2}$.

Assim, a pdp do arco de medida $\frac{7\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2}$; isto significa que os arcos de medida $\frac{7\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ têm a mesma extremidade, determinando as mesmas coordenadas.

Logo, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-1$ e $\cos\frac{7\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

Generalizando, *arcos côngruos têm o mesmo seno e o mesmo cosseno.* Se x é a primeira determinação positiva de um arco, os arcos côngruos a ele são representados por $x+2k\pi$, com k percorrendo o conjunto dos números inteiros. Então

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi)=\operatorname{sen}x,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos(x+2k\pi)=\cos x,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$$

- **Valores notáveis do seno e cosseno**

Vamos lembrar o que acontece no triângulo retângulo:

$$\alpha + \beta = 90^{o}\text{, então:}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a} = \cos\alpha$$

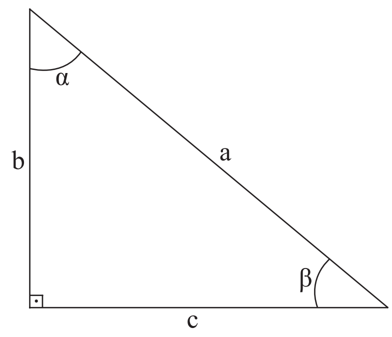


Figura 5.50

Vamos calcular agora os valores de seno e cosseno para os arcos de medida $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$. Veja a figura 5.51.

(i) Para $\alpha = \beta = 45^{o}$, ou $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$2b^2 = a^2$$

$$a = b\sqrt{2}$$

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

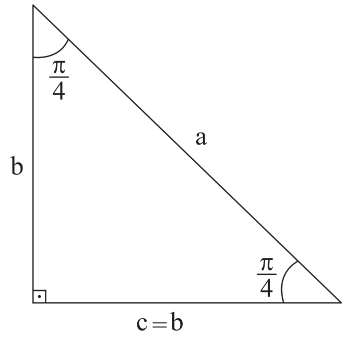


Figura 5.51

(ii) $\alpha = 30^o = \dfrac{\pi}{6}$ e $\beta = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

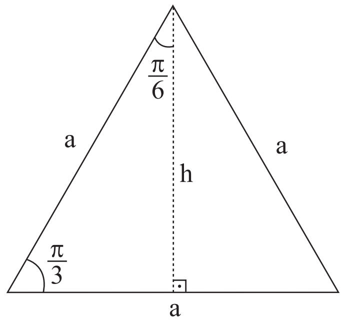


Figura 5.52

Então

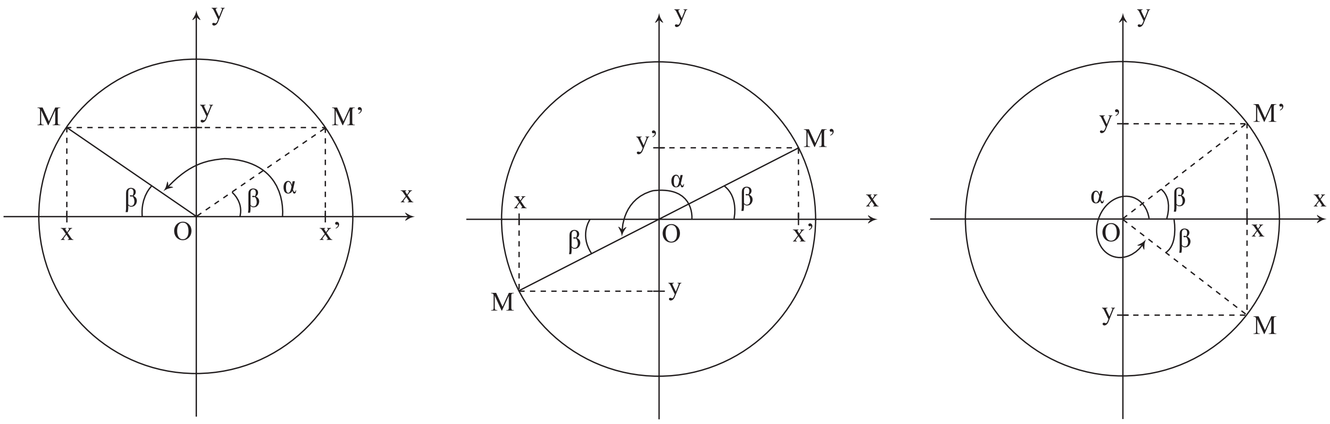
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

Resumindo:

x (em rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

- **Redução ao primeiro quadrante**

Se x é a medida em radianos de um arco no segundo, terceiro ou quarto quadrantes, cos x e sen x podem ser determinados a partir de arcos no primeiro quadrante. Estes arcos do primeiro quadrante são tais que os valores de seno e cosseno, em módulo, são iguais a sen x e cos x. Observe na figura a seguir as simetrias que nos permitem proceder desta forma:



$\cos\alpha = x = -x' = -\cos\beta$
$\text{sen}\,\alpha = y = \text{sen}\,\beta$

$\cos\alpha = x = -x' = -\cos\beta$
$\text{sen}\,\alpha = y = -y' = -\text{sen}\,\beta$

$\cos\alpha = x = \cos\beta$
$\text{sen}\,\alpha = y = -y' = -\text{sen}\,\beta$

Figura 5.53

Faremos agora um exemplo para x em cada um dos quadrantes:

41) Determinar $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}$ e $\cos\dfrac{5\pi}{6}$.

Observemos que o arco de medida $\dfrac{5\pi}{6}$ encontra-se no segundo quadrante e é um múltiplo de $\dfrac{\pi}{6}$, isto é, $\dfrac{5\pi}{6} = 5 \times \dfrac{\pi}{6}$. Para chegar a $\dfrac{5\pi}{6}$ é necessário percorrer cinco arcos de $\dfrac{\pi}{6}$.

Veja a figura:

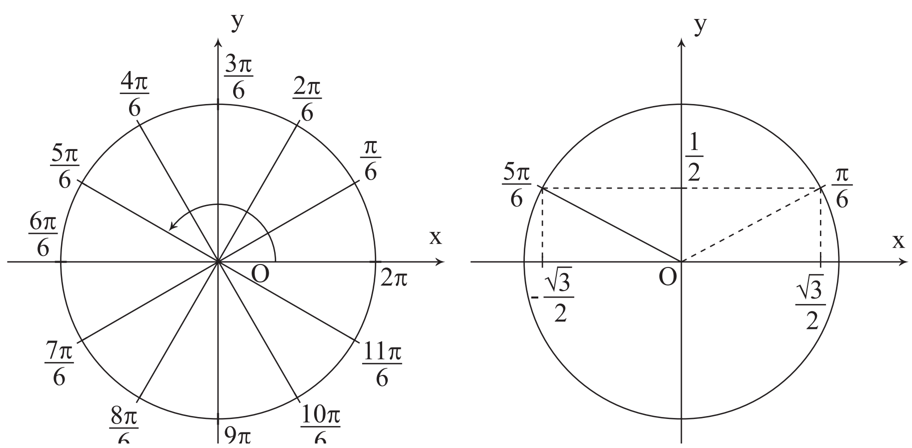


Figura 5.54

Observando a simetria, vemos que

$\text{sen}\frac{5\pi}{6}=\text{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (lembre-se que no segundo quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo).

42) Determine $sen\frac{4\pi}{3}$ e $\cos\frac{4\pi}{3}$.

O arco de medida $\frac{4\pi}{3}$ encontra-se no terceiro quadrante; usando a mesma idéia do exemplo anterior, para chegar a $\frac{4\pi}{3}$, é necessário percorrer quatro arcos de $\frac{\pi}{3}$. Veja a figura:

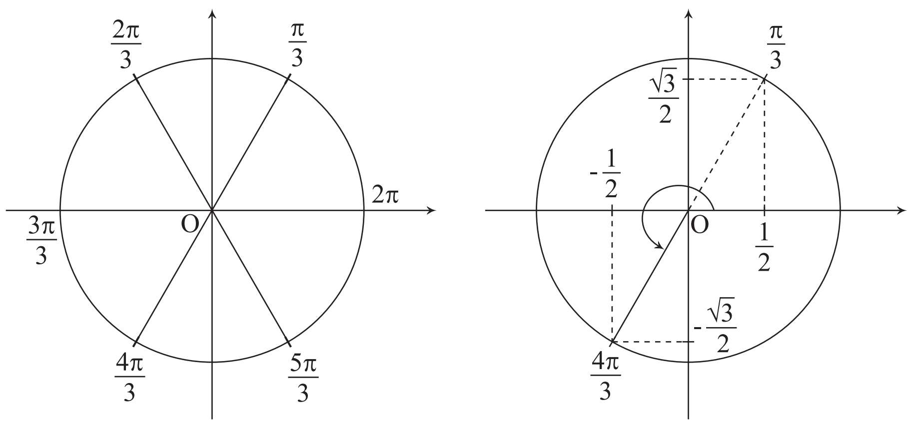


Figura 5.55

Vemos então que

$\text{sen}\frac{4\pi}{3}=-\text{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(Lembre-se que no terceiro quadrante seno e cosseno são negativos).

43) Determine $\text{sen}\frac{7\pi}{4}$ e $\cos\frac{7\pi}{4}$.

O arco de medida $\frac{7\pi}{4}$ encontra-se no quarto quadrante; analogamente aos exemplos anteriores e observando a figura, concluímos que:

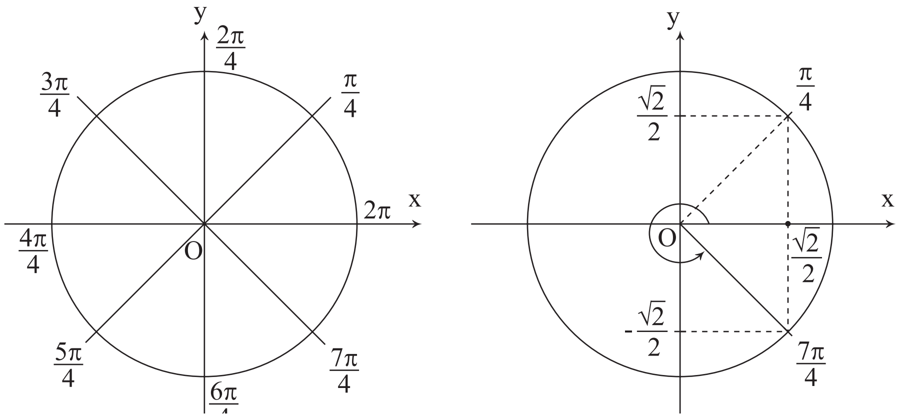


Figura 5.56

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Lembre-se que no quarto quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo).

Exercício proposto

24) Determine seno e cosseno dos arcos de medida:

a) $\frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{11\pi}{4}$

c) $\frac{8\pi}{3}$

d) $-\frac{5\pi}{4}$

e) $\frac{17\pi}{6}$

f) $\frac{23\pi}{3}$

g) $-\frac{24\pi}{16}$

- **Gráficos da função seno e da função cosseno**

Como o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais e a imagem é o intervalo $[-1,1]$, os gráficos destas funções estão contidos na faixa horizontal $\mathbb{R}\times[-1,1]$. Estude os gráficos com atenção: eles darão informações sobre o comportamento das funções seno e cosseno.

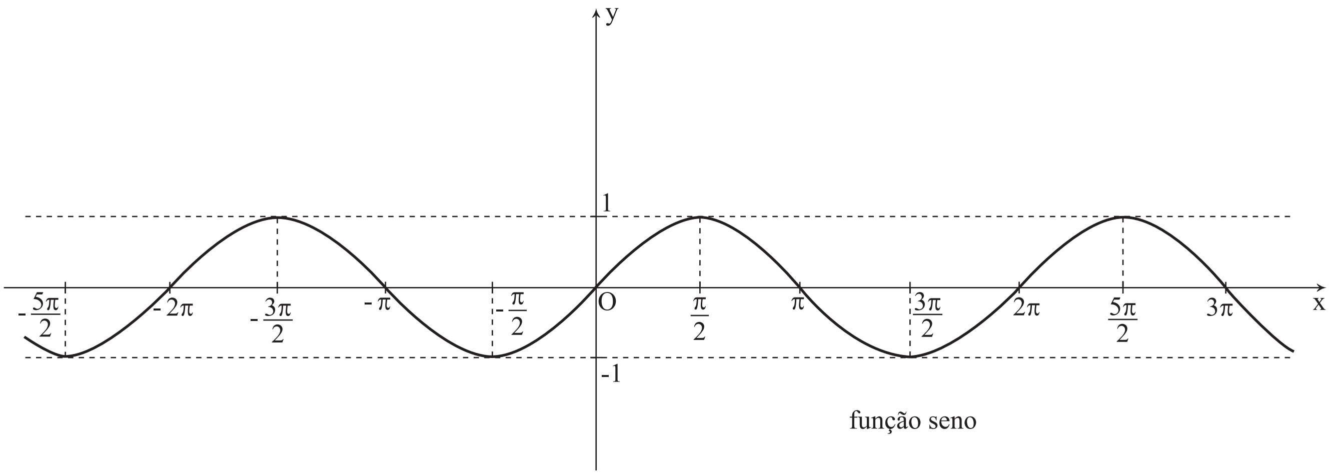


Figura 5.57

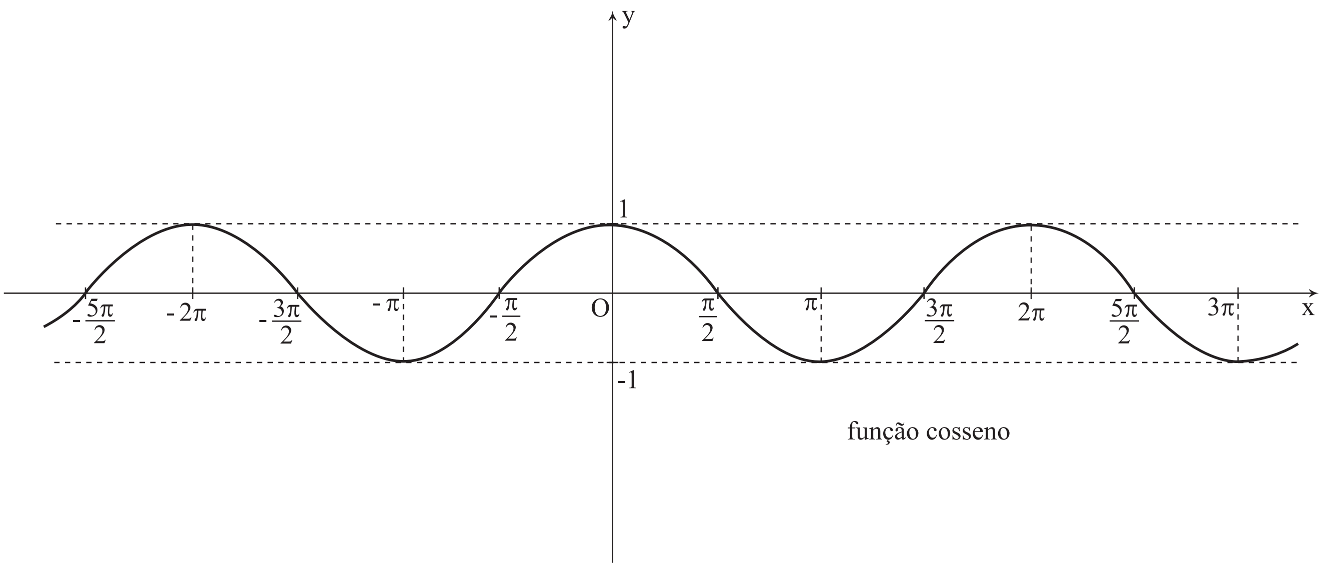


Figura 5.58

- **Considerações sobre as funções seno e cosseno**

As funções seno e cosseno têm características especiais; vamos estudá-las agora, utilizando todas as informações que já temos sobre o comportamento destas funções. Estas informações serão muito importantes para as próximas disciplinas de Cálculo.

1) *Zeros das funções seno e cosseno*

Os zeros das funções seno e cosseno são os valores de x para os quais se tem $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = 0$, respectivamente. Analisando os gráficos, vemos que:

i) os zeros de sen x são

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,...,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,...$$

ou seja, os valores de x dados por $x = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) os zeros da função cos x são

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},...,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2},...$$

ou seja, os valores de x dados por $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ou $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2) *Seno e cosseno são funções periódicas.*

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso também tem-se $f(x+kT) = f(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$. O *menor número positivo* T tal que $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamado de *período* da função f.

Já sabemos que $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}\,x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e também $\text{sen}(x+2k\pi)=\text{sen}\,x,\ \forall\ k\in\mathbb{Z},\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Isto nos garante que seno é uma função periódica e o menor número positivo T para o qual se tem $\text{sen}(x+T)=\text{sen}\,x$ é $T=2\pi$. Assim, o período da função seno é 2π. Isto significa que o gráfico da função sen x "se repete" a cada intervalo de comprimento 2π, a partir da origem. Analogamente, o período da função cosseno também é 2π. Veja novamente as figuras 5.57 e 5.58.

Exercício resolvido

9) Encontre o período da função $f(x)=sen\left(\frac{4}{5}x\right)$

Resolução: Procuramos o menor número $T>0$ tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Isto significa que

$$f(x+T)=\text{sen}\left(\frac{4}{5}(x+T)\right)=\text{sen}\left(\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}T\right)=\text{sen}\,\frac{4}{5}x=f(x).$$

Como o período da função seno é 2π, devemos ter $\frac{4}{5}T=2\pi\Rightarrow T=\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$. Logo, o período de f é $\frac{5\pi}{2}$. Confira o resultado fazendo o gráfico.

3) *Cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar*

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *par* quando $f(x)=f(-x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ e uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *ímpar* quando $f(x)=-f(-x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Vamos analisar as funções seno e cosseno:

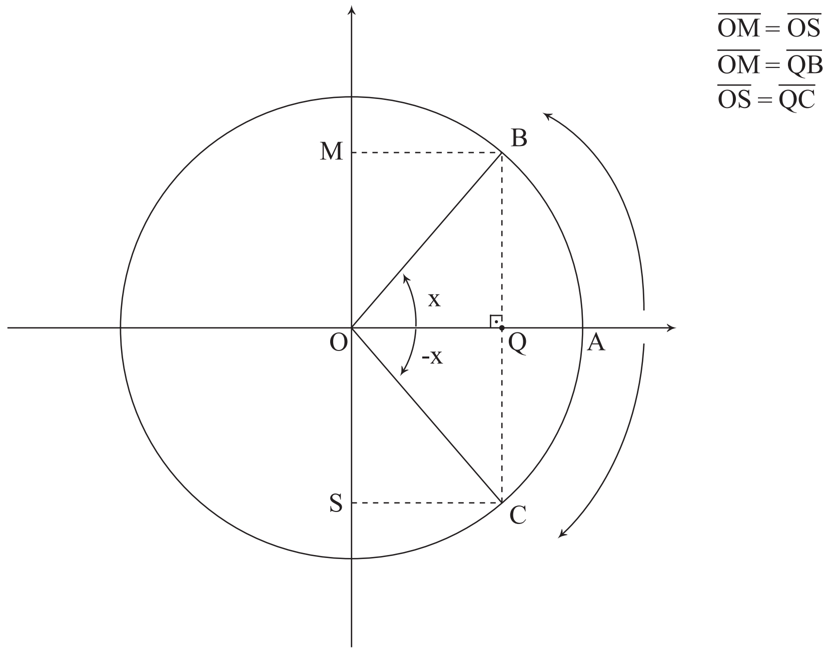


Figura 5.59

O triângulo BOC é isósceles, o que significa que os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ têm a mesma medida de x rad. Logo, $\cos x = \cos(-x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

4) *Funções compostas envolvendo seno e cosseno*

Dada uma função real g, podemos pensar nas funções compostas $(\operatorname{sen} \circ g)(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, $(\cos \circ g)(x) = \cos(g(x))$, $(g \circ \operatorname{sen})(x) = g(\operatorname{sen} x)$ e $(g \circ \cos)(x) = g(\cos x)$. Vamos fazer alguns exemplos para casos especiais da função g.

Exemplos

44) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \pi$,
$(\operatorname{sen} \circ g)(x) = \operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

Vamos fazer o gráfico da função $sen(x+\pi)$, comparando-o com o gráfico de sen x :

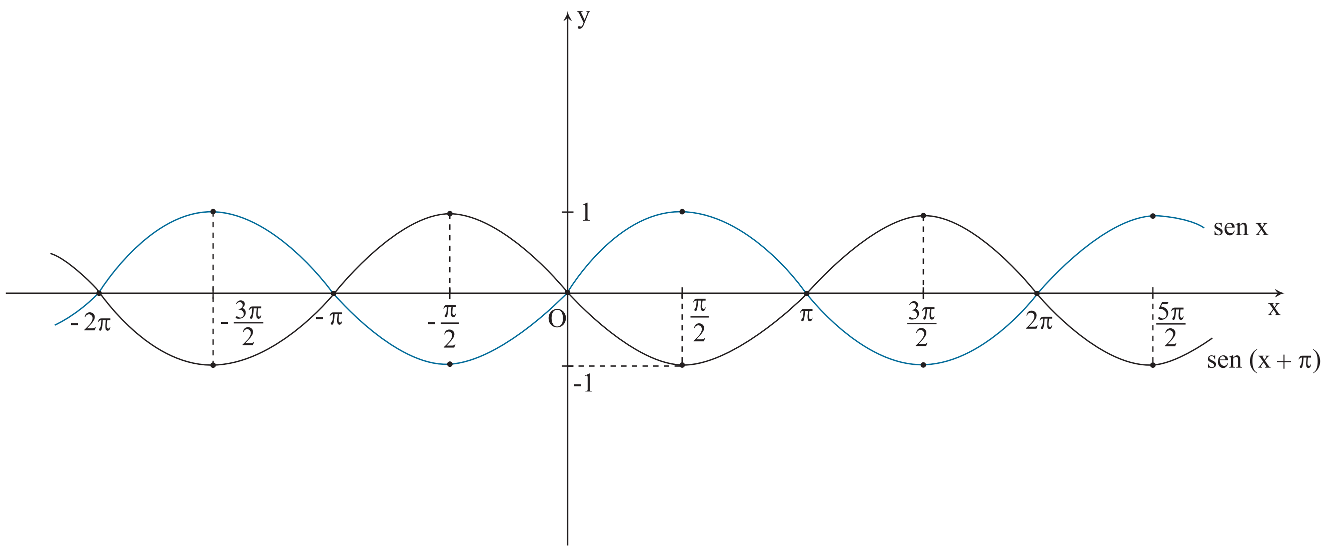


Figura 5.60

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sen\ (x+\pi)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Analisando o gráfico, vemos que:

1) Os gráficos das funções sen x e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo "formato". A diferença é que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ está "deslocado" π unidades à direita no plano cartesiano em relação ao gráfico de sen x. Note que os gráficos das duas funções cortam o eixo X nos mesmos pontos.

2) O domínio e a imagem da função $\operatorname{sen}(x+\pi)$ são os mesmos da função sen x.

3) sen x e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo período 2π (note que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ se repete a cada intervalo de comprimento 2π, a partir de $x=0$).

Tarefa

Faça o gráfico da função composta $(\cos \circ g)(x)=\cos(g(x))=\cos(x+\pi)$ e compare-o com o gráfico de cos x. O que você conclui?

45) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2x$, $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$

Vamos comparar o gráfico da função $\cos(2x)$ com o gráfico de *cos x*:

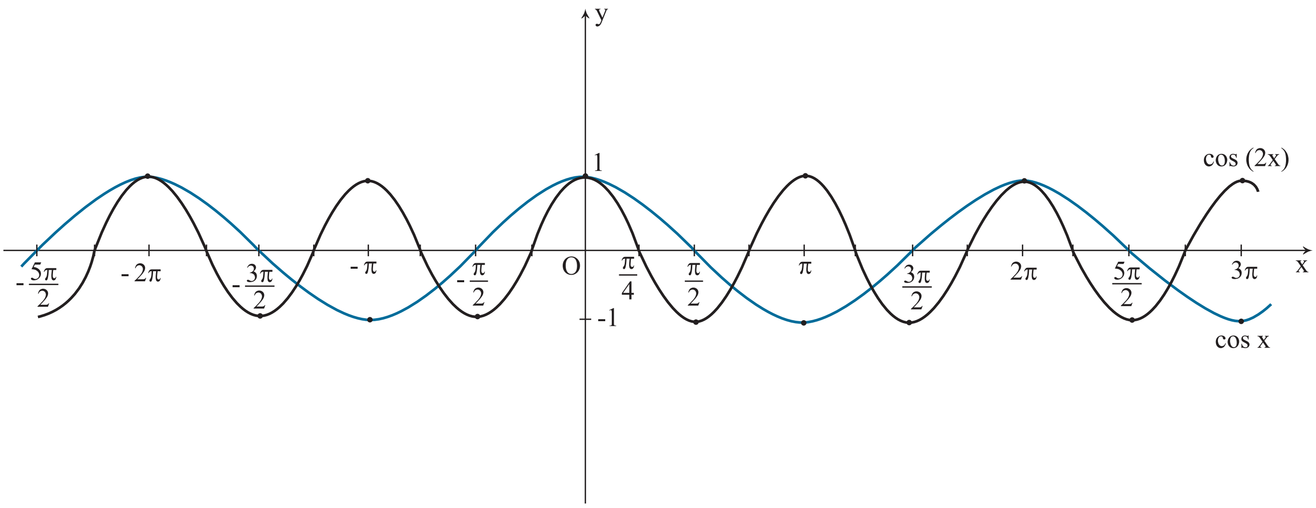


Figura 5.61

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cos (2x)	1	0	-1	0	1

Analisando os gráficos, vemos que:

1) **os gráficos de $\cos(2x)$ e $\cos x$ têm o mesmo "formato" mas o gráfico de $\cos(2x)$ parece que "encolheu"! Por exemplo, $\cos(2x)$ corta o eixo X em $x=\frac{\pi}{4}$, enquanto cos x corta o eixo X em $x=\frac{\pi}{2}$ (as funções não têm os mesmos zeros). Isto significa que cos x e $\cos(2x)$ não têm o mesmo período; o gráfico de $\cos(2x)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, a partir da origem. De fato, para a função composta $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$, temos que:**

$$(\cos\circ h)(x+\pi)=\cos(h(x+\pi))=\cos(2(x+\pi))=$$
$$\cos(2x+2\pi)=\cos(2x)=\cos(h(x))=(\cos\circ h)(x).$$

2) **o domínio e a imagem da função $\cos(2x)$ são os mesmos da função $\cos x$.**

Tarefa

1) Faça e estude os gráficos das funções compostas $\cos(3x)$, $\cos(4x)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

O que você conclui sobre os períodos destas funções? E sobre os períodos das funções $\operatorname{sen}(3x)$, $\operatorname{sen}(4x)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$?

2) Para $f(x)=2x+\frac{\pi}{2}$, faça o gráfico e determine o período da função composta $(\cos\circ f)(x)=\cos(f(x))=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo

46) $u(x)=1+x$, $(u\circ \operatorname{sen})(x)=u(\operatorname{sen}(x))=1+\operatorname{sen} x$

Vamos analisar e comparar os gráficos de *sen x* e $1+\operatorname{sen} x$:

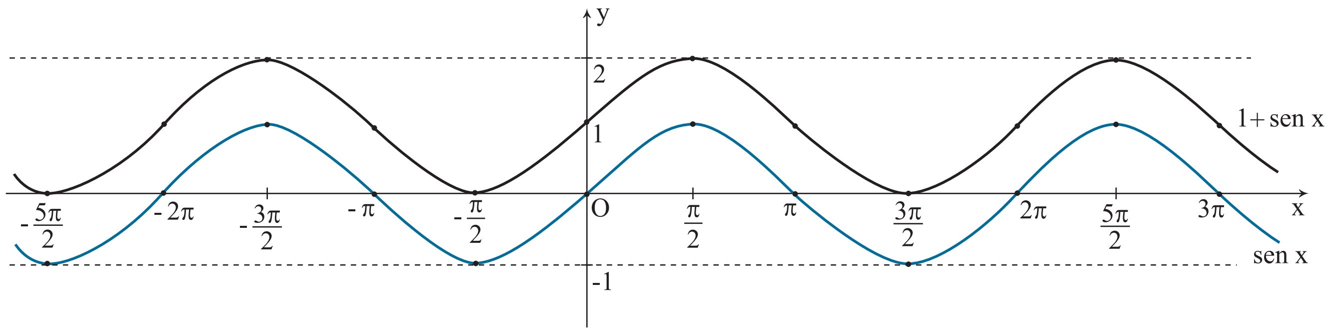


Figura 5.62

Observamos que:

1) os dois gráficos têm o mesmo "formato", mas o gráfico de $1+\operatorname{sen} x$ está deslocado uma unidade na vertical, para cima. Conseqüentemente, a função $1+\operatorname{sen} x$ não corta o eixo X nos mesmos pontos que a função $\operatorname{sen} x$ (as funções não têm os mesmos zeros).

2) o período das funções é 2π.

3) o domínio de $1+\operatorname{sen} x$ é o mesmo da função $\operatorname{sen} x$, mas as imagens são diferentes: $\operatorname{Im}(1+\operatorname{sen} x)=[0,2]$.

Tarefa

Seja $v(x) = -2 + x$. Analise o gráfico da função composta
$(v \circ \cos)(x) = v(\cos(x)) = -2 + \cos x$.
Compare com o gráfico de cos x.

Exercícios propostos

25) Dê o período e os zeros das seguintes funções:

a) $m(x) = 3 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $s(x) = -4 + \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

26) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$.

a) $f(x) = \text{sen}(-2x)$

b) $g(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)$

c) $m(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

27) Sabendo que $\cos x = 0{,}1$ e x está no quarto quadrante, calcule sen x.

- **Inversas das funções seno e cosseno**

Seno e cosseno não são funções injetoras; por exemplo, temos $\text{sen}\ 0 = \text{sen}\ \pi = 0$ e $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, valores distintos resultando na mesma imagem. Mas, observando o gráfico destas funções, vemos que, se as restringirmos a certos intervalos (domínio e contradomínio), elas serão injetoras e sobrejetoras e, portanto, terão uma inversa. Vamos analisar a função seno. Observe atentamente seu gráfico:

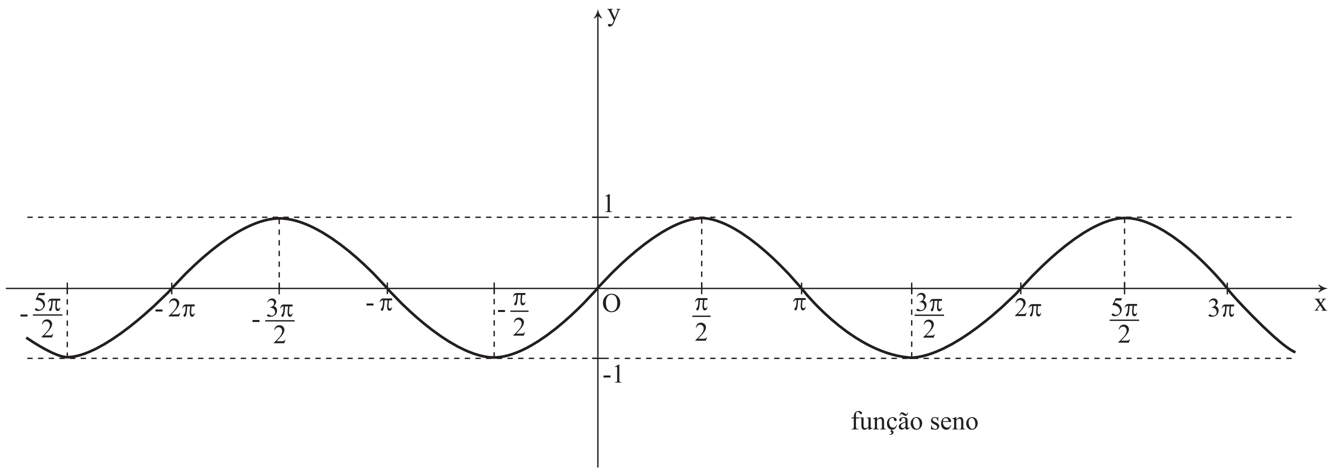


Figura 5.63

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é injetora, e o mesmo ocorre nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, e em uma infinidade de outros. Observe também que nestes intervalos a imagem da função é $[-1,1]$, ou seja, ela também é sobrejetora. Fixando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, consideremos a função

$$F:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

$$F(x) = \operatorname{sen} x$$

F é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível! Definimos a inversa da função F como

$$g:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$g(x) = \operatorname{arcsen} x$ (lê-se "arco seno de x").

A função g associa a cada número real x do intervalo $[-1,1]$, o *arco* cujo *seno* é x. Por exemplo:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6};\ g(0) = 0;\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};\ g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

O gráfico da função g é dado por

x	arc sen x
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6} \cong 0,52$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3} \cong 1,04$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4} \cong 0,78$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$

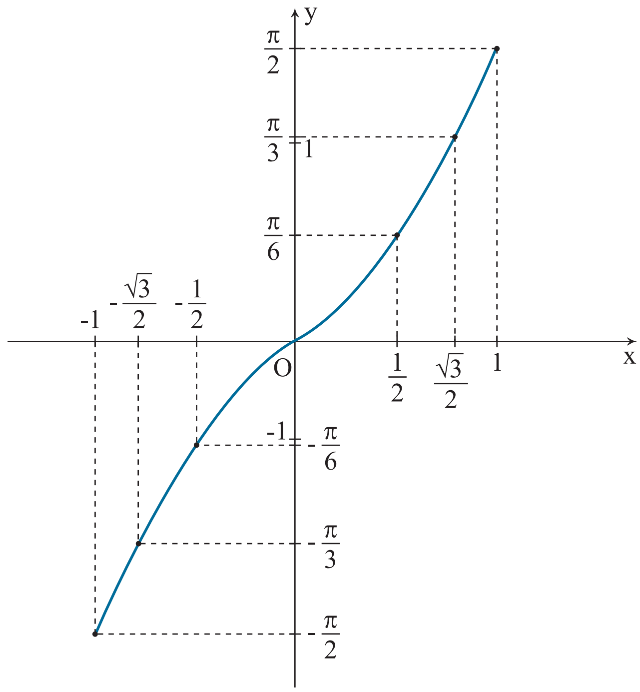


Figura 5.64

Note que os gráficos de F e g são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

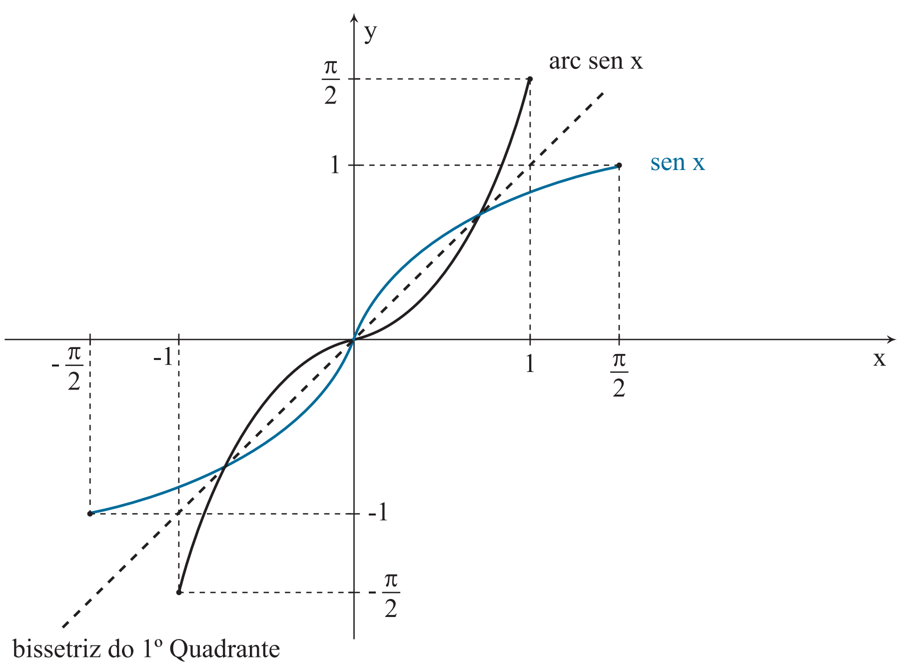


Figura 5.65

Analisando agora a função cosseno,

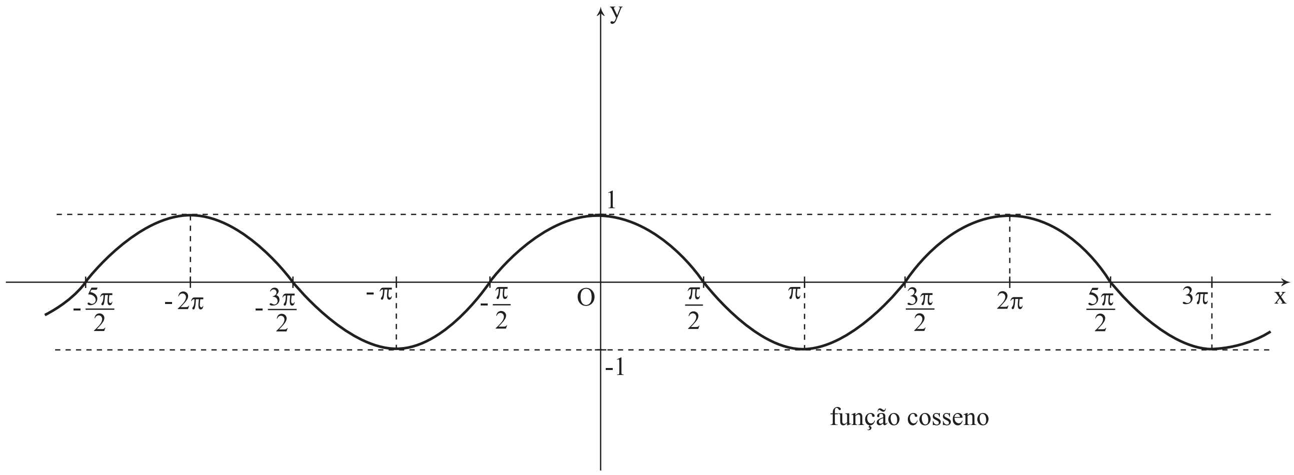


Figura 5.66

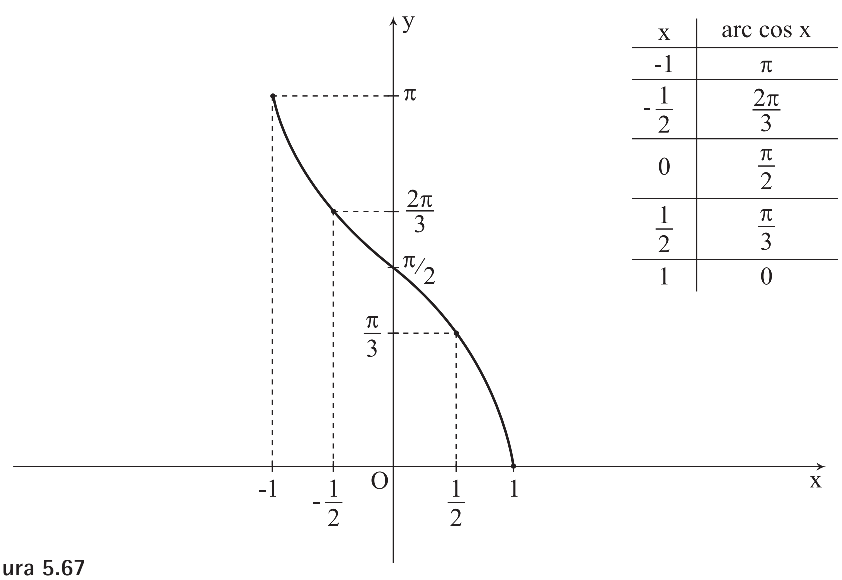
Vemos que ocorre a mesma situação que ocorria com o seno: em certos intervalos a função é injetora. Fixamos o intervalo $[0,\pi]$ para definir a função

$$H:[0,\pi]\to[-1,1]$$
$$H(x)=\cos x$$

H é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível. A inversa da função H é a função:

$$h:[-1,1]\to[0,\pi]$$
$$h(x)=\arccos x \text{ (lê-se “arco cosseno de } x\text{”).}$$

A função h associa a cada número real x do intervalo [-1,1] o *arco* cujo *cosseno* é x. O gráfico da função h é dado por:



x	arc cos x
-1	π
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
1	0

Figura 5.67

Também neste caso os gráficos de H e h são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

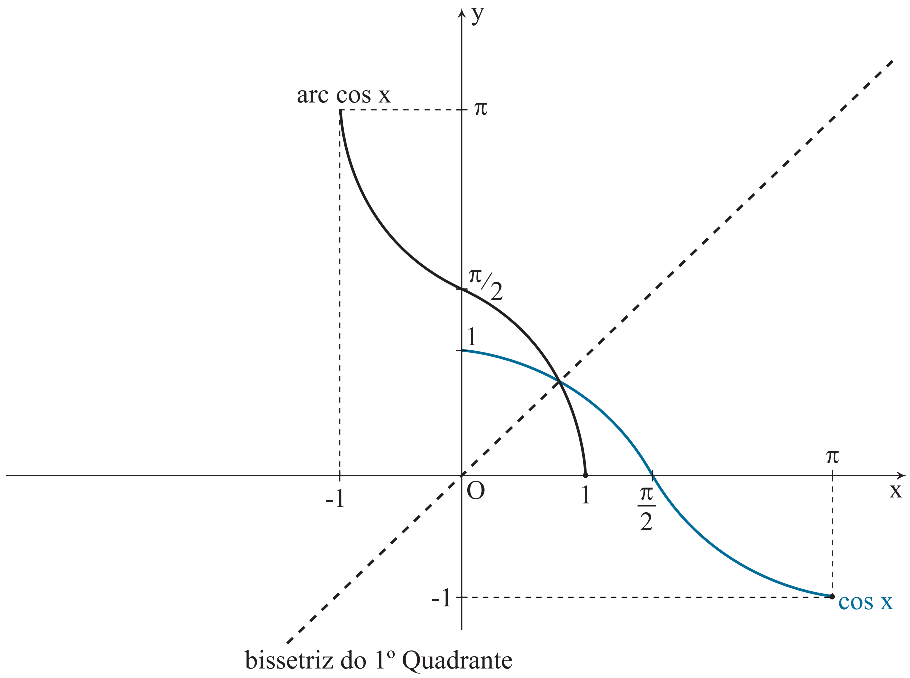


Figura 5.68

Exercícios resolvidos

10) Calcule $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução. Queremos calcular o seno do arco cujo cosseno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Se y é o arco cujo cosseno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, qual o valor de $\operatorname{sen} y$? Lembramos que nosso intervalo de trabalho para os valores do arco y é o intervalo $[0,\pi]$, a imagem da função arco cosseno. Assim, existe um único valor de y no intervalo $[0,\pi]$, tal que $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Este valor, como sabemos, é $\frac{\pi}{4}$. Assim, $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{sen} y=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11) Determine $\operatorname{sen}(\arccos x)$, para x qualquer em $[-1,1]$.

Resolução. Seja y o arco cujo cosseno é x, isto é, $\cos y=x$. Queremos determinar $\operatorname{sen} y$. Pela relação fundamental, temos que

$\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$; substituindo $\cos y = x$ na igualdade, temos:

$$\text{sen}^2 y + x^2 = 1$$
$$\text{sen}^2 y = 1 - x^2$$
$$\text{sen}\, y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Para escolher o sinal correto, ou seja, para saber se $\text{sen}\, y$ é positivo ou negativo, devemos observar que y pertence à imagem da função arco cosseno, isto é, y pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Neste intervalo o seno é positivo, e temos $\text{sen}\, y = \sqrt{1 - x^2}$.

12) Determine $\text{arcsen}\left(\text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Resolução. Como $\text{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$, o problema consiste em determinar $\text{arcsen}(-1)$. O único arco pertencente ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é – 1 é $\dfrac{-\pi}{2}$. Logo, $\text{arcsen}\left(\text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Você poderia pensar que, como seno e arco seno são funções inversas, então $\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x$, para qualquer valor x. Mas não podemos esquecer a definição! É preciso estar atento para o domínio e contradomínio das duas funções.

Exercício proposto

28) Calcule:

a) $\text{sen}\left(\text{arcsen}\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\text{sen}(\arccos 0)$

d) $\cos\left(\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

f) $\arccos\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5.4.2 A função tangente

Seja x um número real cujo cosseno é diferente de zero, determinando no ciclo trigonométrico o ponto D (lembre-se: o ponto D é a extremidade do arco de medida x rad.). Definimos a função tangente de x (a notação é tg x) como sendo a ordenada do ponto B, que é o ponto de intersecção do prolongamento do raio OD com uma reta paralela ao eixo Y passando pelo ponto A (tangente à circunferência), chamada "eixo das tangentes". Este eixo é uma "cópia" do eixo Y, com valores negativos abaixo de A e positivos acima de A. Veja a figura:

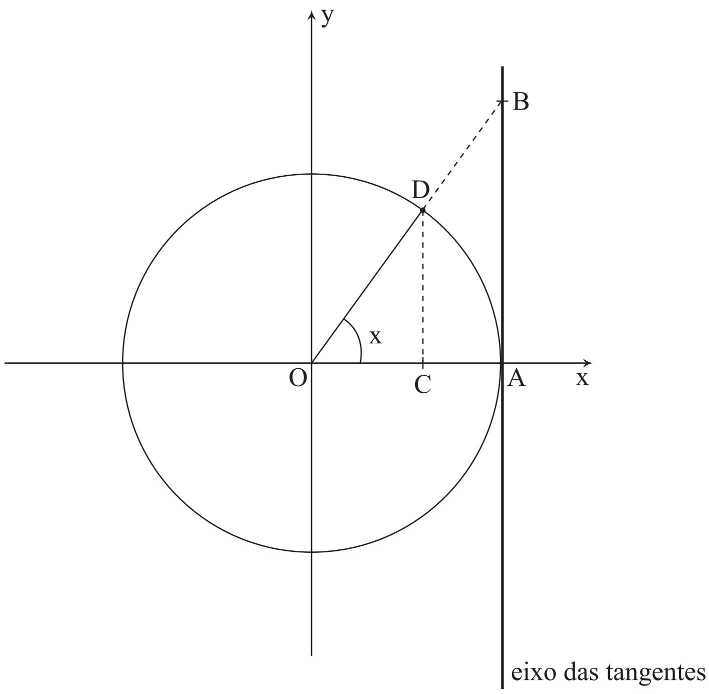


Figura 5.69

Observação 17. Note que se o cosseno de x for zero, então x será um arco de medida $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso não haverá intersecção do prolongamento do raio OD com o eixo das tangentes, uma vez que serão paralelos. Por isso excluímos estes arcos da definição de tangente.

- **Relação entre seno, cosseno e tangente**

Na figura 5.69 considere os triângulos COD e AOB, que são semelhantes. Então seus lados são proporcionais e teremos

Por quê?

$\dfrac{CD}{OC} = \dfrac{AB}{OA}$, ou seja, $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\text{tg}\, x}{1}$, para valores de x tais que

$\cos x \neq 0$. Lembrando que $\cos x = 0$ quando $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função tangente como:

$$tg : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

- **Sinal algébrico da tangente**

O sinal da tangente depende dos sinais do seno e do cosseno. No primeiro e terceiro quadrantes seno e cosseno têm o mesmo sinal, o que significa que a tangente é um número positivo. No segundo e no quarto quadrantes seno e cosseno têm sinais contrários, o que significa que a tangente é um número negativo. Também podemos analisar geometricamente, como mostra a figura (notação análoga a da figura 5.69):

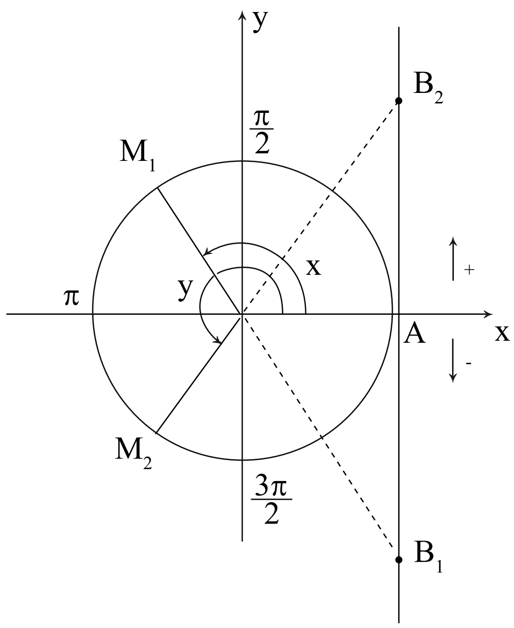


Figura 5.70

- **Valores notáveis da tangente**

Para $x = 0$, temos $\text{sen } 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Logo, $\text{tg } 0 = 0$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$, não existe um valor para a tangente, mas observe que quando x assume valores cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, porém menores do que $\frac{\pi}{2}$, os valores de $\operatorname{tg} x$ aumentam, tornando-se infinitamente grandes. Veja a figura:

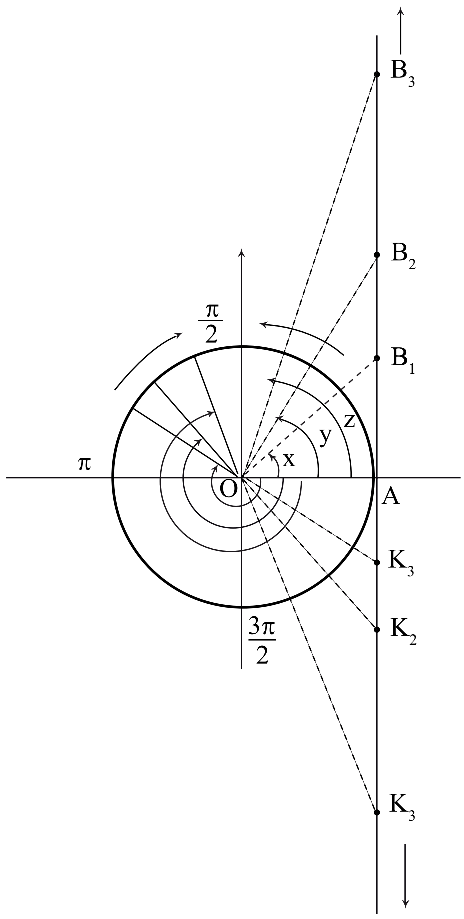


Figura 5.71

No entanto, quando x assume valores maiores do que $\frac{\pi}{2}$ e aproximando-se cada vez mais deste valor, $\operatorname{tg} x$ é um número negativo assumindo, em módulo, valores infinitamente grandes.

Para $x = \pi$, $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$. Logo, $\operatorname{tg} \pi = 0$.

Para $x = \frac{3\pi}{2}$, não existe $\operatorname{tg} x$. Estude o que acontece com a $\operatorname{tg} x$ quando os valores de x se aproximam de $\frac{3\pi}{2}$.

Para $x = \frac{\pi}{4}$, $tg\,\frac{\pi}{4} = \frac{sen\,\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

Para $x = \frac{\pi}{6}$, $tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{sen\,\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Para $x = \frac{\pi}{3}$, $tg\,\frac{\pi}{3} = \frac{sen\,\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Resumindo:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

Exercício resolvido

13) Determine o valor de $tg\,\frac{22\pi}{3}$.

Resolução.

$\frac{22\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3}$. Logo, $\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$.

Como $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$,

teremos $\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Observação 18. Como sabemos reduzir seno e cosseno ao primeiro quadrante, também podemos fazê-lo para a tangente, já que ela depende destas duas funções. Note que basta conhecer uma das funções, seno ou cosseno, para conhecermos a tangente, pois seno e cosseno estão relacionados pela Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Por exemplo, se sabemos que x está no primeiro quadrante e $\operatorname{sen} x = 0,2$, podemos calcular a tg x fazendo:

$$(0,2)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$0,04 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 0,04$$

$$\cos^2 x = 0,96 = \frac{96}{100}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{96}{100}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(como x está no 1º quadrante, tomamos a raiz positiva).

Logo, $\operatorname{tg} x = \dfrac{0,2}{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{\dfrac{2}{10}}{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

- **Gráfico da função tangente**

Lembrando as considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente, vamos construir seu gráfico:

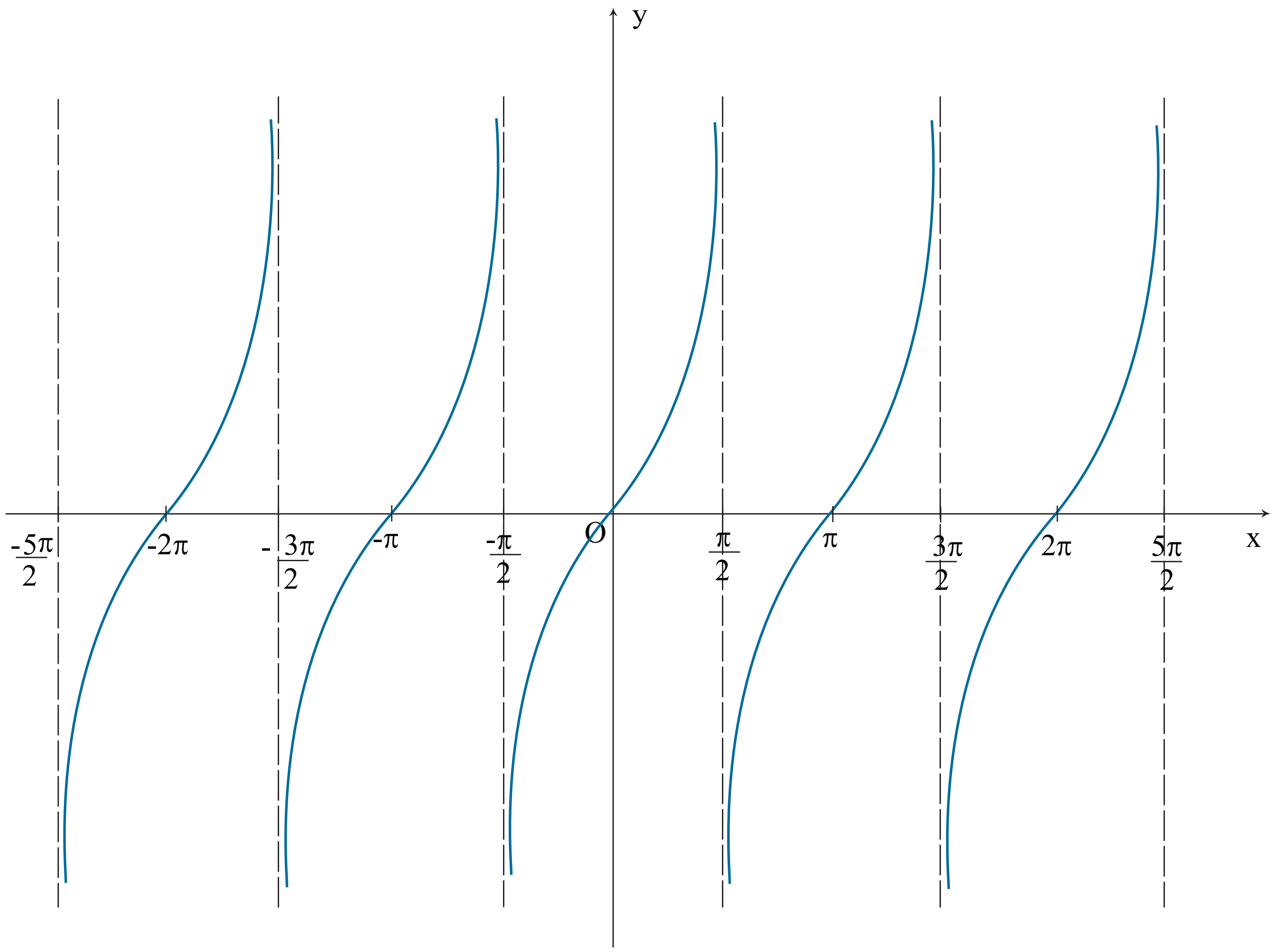


Figura 5.72

Estudando o gráfico, podemos observar que:

1) A tangente é uma função periódica e seu período é π. De fato,

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\operatorname{sen} x.\cos\pi+\cos x.\operatorname{sen}\pi}{\cos x.\cos\pi-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}\pi}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x.$$

Note que o gráfico no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, do tipo $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ com $k\in\mathbb{Z}$.

2) Os zeros da função tangente são os zeros da função seno, isto é, $\text{tg}\, x = 0$ quando $x = k\pi$, pra todo $k \in \mathbb{Z}$.

3) A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais.

4) A função não está definida para os valores $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, estes pontos não têm imagem pela função tangente. Observe o que acontece na vizinhança destes pontos, lembrando das considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente.

5) Nos intervalos

... $\left(\frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}\right), \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), ..$ a função tangente é injetora. Isto nos sugere que ela é inversível em cada um destes intervalos.

- **Inversa da função tangente**

Restringindo a função tangente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obtemos uma função bijetora

$$G : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$G(x) = \text{tg}\, x$$

A inversa da função G é a função

$$g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$g(x) = \text{arctg}\, x$ (como para seno e cosseno, lê-se "arco tangente de x").

A função inversa g associa a cada número real x o arco cuja tangente é x. Por exemplo, $g(1) = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, $g(-1) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $g(0) = \text{arctg}\, 0 = 0$.

Os gráficos da função tangente e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

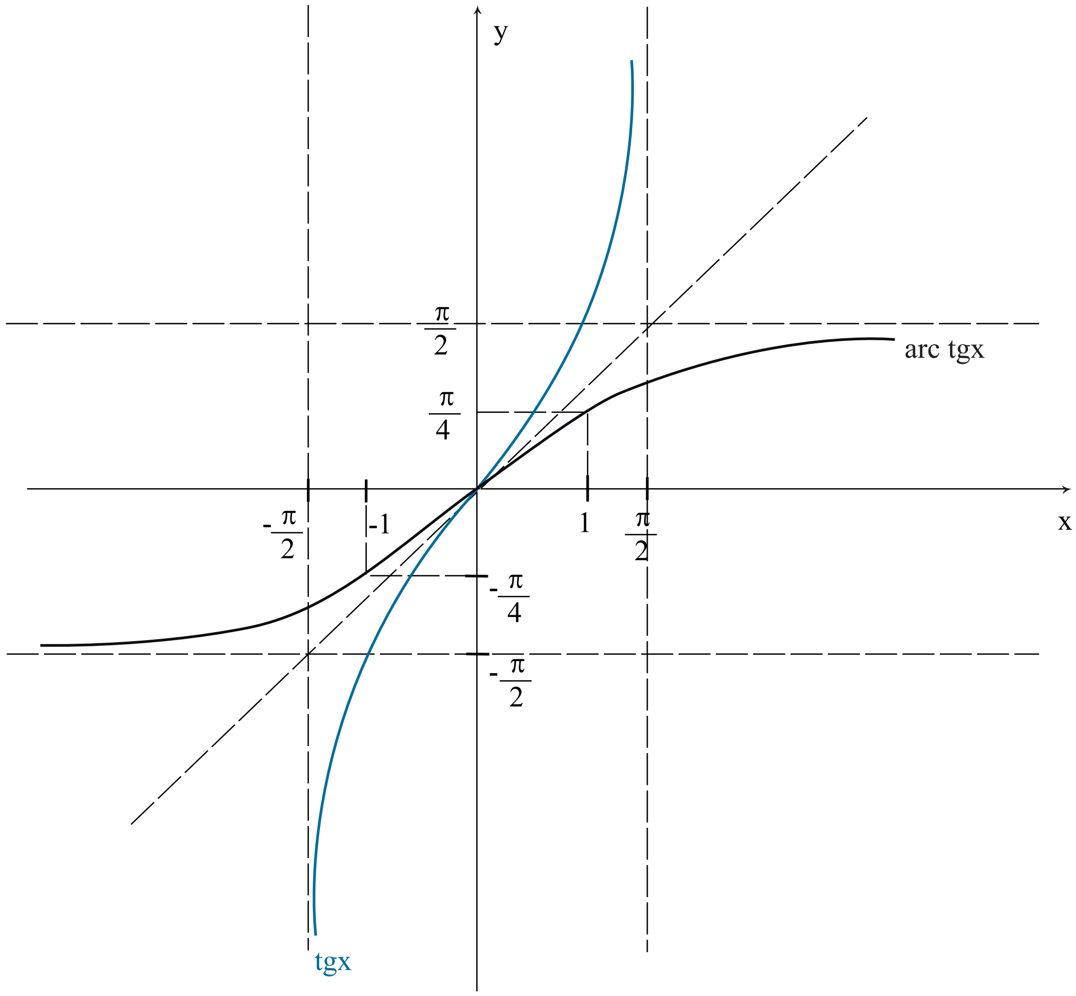


Figura 5.73

Exercício resolvido

14) Calcule $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.

Resolução. Seja x o arco cuja tangente é $-\sqrt{3}$, isto é, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Queremos calcular $\operatorname{sen} x$. Sabemos dos valores notáveis que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; mas qual arco cuja tangente resulta no oposto deste número? Vamos observar no ciclo trigonométrico:

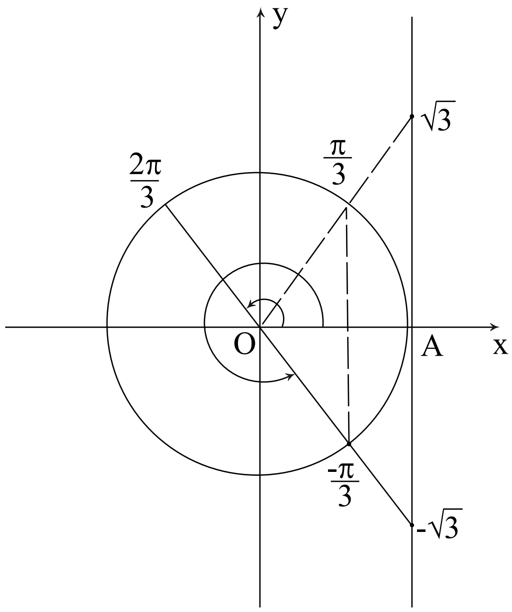


Figura 5.74

Vemos que, para os arcos de medida $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{-\pi}{3}$ tem-se $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{-\pi}{3} = -\sqrt{3}$. Mas a função arctg tem como imagem o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, isto é, tem como imagem arcos no primeiro ou quarto quadrantes. O arco de medida $\frac{2\pi}{3}$ está no segundo quadrante. Logo, escolhemos $x = \frac{-\pi}{3}$ e $\operatorname{sen}\frac{-\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios propostos

29) Conhecendo o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{3}$ rad, calcule sen x e cos x para:

a) $x = 1230^o$

b) $x = -960^o$

c) $x = \frac{-13\pi}{4}$ rad

d) $x = \frac{47\pi}{6}$ rad

30) Determine o sinal algébrico dos números reais:

a) $\operatorname{sen}\sqrt{5}$

b) $\cos 7{,}68$

c) $\operatorname{sen} 13$

d) $\cos\sqrt{2}$

31) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$.

a) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

b) $g(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

c) $h(x) = 1 + \cos 3x$

$m(x) = -2 + \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

32) Dê o período das funções:

a) $g_1(x) = \cos\dfrac{3x}{4}$

b) $g_2(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $g_3(x) = 5\cos\dfrac{\pi x}{2}$

d) $g_4(x) = 8 - \operatorname{sen}\dfrac{x}{3}$

e) $g_5(x) = 1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

f) $g_6(x) = \operatorname{tg}(2x)$

33) Mostre as identidades:

a) $\cos(\pi + t) = -\cos t$

b) $\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$

c) $\operatorname{sen} 3t = 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t$

d) $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

34) Calcule:

a) $\operatorname{tg}\frac{-13\pi}{3}$

b) $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{4}$

35) Sabendo que $\cos x = 0{,}8$ e que x está no quarto quadrante, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$.

36) Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{6}$ e x está no terceiro quadrante, calcule $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$.

37) Determine o domínio da função $f(t) = \operatorname{tg}(5t+1)$.

38) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Generalize para o conjunto $\mathbb{R}$.

Resumo do Capítulo

Neste capítulo estudamos as funções elementares:

1) Funções polinomiais – função afim, função quadrática e funções polinomiais de modo geral.

2) Funções racionais (quociente de funções polinomiais).

3) Funções envolvendo módulo.

4) Funções trigonométricas - seno, cosseno e tangente.

As funções trigonométricas cotangente, secante e cossecante dependem das funções seno e cosseno e serão apresentadas em material complementar. As funções logaritmo e exponencial também serão apresentadas em material complementar.

Para construção de gráficos, sugerimos que você use seus conhecimentos da disciplina Estudo de Softwares Educacionais: o software *Winplot*, por exemplo. Lembre-se que para utilizar confortavelmente um software de construção de gráficos, você precisa conhecer a teoria das funções.

Bibliografia Comentada

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar.* 8 ed. Guarulhos: Atual, 2004. (Fundamentos da Matemática Elementar, v.1 conjuntos, funções e v.3 trigonometria).

Estes livros apresentam um resumo da teoria e muitos exercícios resolvidos e propostos.

CARNEIRO, V.C. *Funções Elementares*, Editora da UFRG, Porto Alegre, 1993.

Dentre as refeências citadas na bibliografia, sugerimos a consulta deste livro.

Revista do Professor de Matemática (todos os números). São Paulo: SBM, 2006.

Em vários números você vai encontrar artigos interessantes sobre as funções elementares; a maioria deles será útil para seu trabalho em sala de aula.

Bibliografia

1) ÁVILA, G. *Análise Matemática para a licenciatura*. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 2001.

2) CARNEIRO, V.C. *Funções Elementares*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1993.

3) DOMINGUES, H.H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual Editora, 1998.

4) FLEMMING, D.M. & GONÇALVES, M.B. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 1992.

5) GUIDORIZZI, H.L. *Um Curso de Cálculo*. São Paulo: Ed. Livros Técnicos e Científicos, 1987.

6) LIMA,E.L *et all*. *A matemática do ensino médio*. Volume 1; Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2001.

7) MONTEIRO, L.H.J. *Iniciação às Estruturas Algébricas*. São Paulo: G.E.E.M., 1973.

8) SIMMONS, G.F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill Ltda., 1985.

9) SPIVACK, M. *Calculus*. Houston: Publish or Perish, 1994.

10) *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula* (coleção), 6 volumes. São Paulo: Saraiva S.A. Livreiros Editores, 2001.

11) ZILL D.; DOWAR, J. *Basic Mathematics for Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1994.

12) *Revista do Professor de Matemática* (todos os números). São Paulo: SBM, 2006.

13) *Revista Eureka!*. (todos os números). Rio de Janeiro: OBM/SBM, 2006.