Capítulo 1

INTEGRAIS

1.1 lista 1.2.1, página 10

[pág 04] Proposição 1.2.:

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como a é o ínfimo do conjunto A então a é cota inferior por definição, logo para todo $x \in A$ tem-se $x \geq a$, demonstrando o item (I_1),

Para verificar o item (I_2) suponha, por absurdo que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $a+\varepsilon_0 \leq x$ $\forall x \in A$. Segue que $a + \varepsilon_0$ é cota inferior de A. Mas $a \leq a + \varepsilon_0$. Temos então um absurdo pois como a é ínfimo, é a maior das cotas inferiores. Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $a + \varepsilon \geq x$.

($\Leftarrow$) Do item (I_1) segue que a é cota inferior de A. É preciso mostrar que a é a maior das cotas inferiores. Suponha, por absurdo, que exista a_0 cota inferior tal que $a_0 > a$. Logo $0 < a_0 - a$. Seja $\varepsilon = a_0 - a$. Então, por (I_2), $\exists x \in A$ tal que $x \leq a + \varepsilon = a + (a_0 - a) = a_0$. Ou seja, $x \leq a_0$, o que nos leva a um absurdo, já que a_0 é cota inferior de A.

[pág 04] Proposição 1.3.:

Demonstração item (ii):

Por hipótese B é limitado e $A \subset B$. Vamos mostrar que $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Como B é limitado existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x \quad \forall x \in B$. Como $A \subset B$ segue que $b \leq x \quad \forall x \in A$. Portanto, A é limitado inferiormente. Como A e B são limitados inferiormente, ambos admitem ínfimo (Teorema 1.1.). Sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

tais que $\alpha = \inf(A)$ e $\beta = \inf(B)$. Segue que $\beta \leq x \quad \forall x \in B$ e $\beta \leq x \quad \forall x \in A$ pois $A \subset B$. Assim, β é cota inferior de A, logo $\beta \leq \alpha$ pois α é a maior das cotas inferiores. Portanto $\inf(B) \leq \inf(A)$.

[pág 07] Teorema 1.2.:

Demonstração item (ii):

Vamos supor o refinamento Q obtido assim como no item (i), ou seja, acrescentando-se o ponto $\overline{x}$ na partição P. Então $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, \overline{x}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. Sejam m_i, m' e m'' os supremos de f nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, \overline{x}]$ e $[\overline{x}, x_i]$, respectivamente.

Temos,

$$\begin{aligned} S(f;Q) &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_2) + \ldots + m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) + \\ &\quad + m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ S(f;P) &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_2) + \ldots + m_i(x_i - x_{i-1}) + m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \\ &\quad + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} S(f;Q) - S(f;P) &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - \overline{x} + \overline{x} - x_{i-1}) \\ &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) - m_i(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - \overline{x}) \\ &= (m' - m_i)(\overline{x} - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - \overline{x}) \end{aligned}$$

Como $[x_{i-1}, \overline{x}] \subset [x_{i-1}, x_i]$ então $m_i \geq m'$. Analogamente, $m_i \geq m''$(Ver Proposição 1.2.).

Segue que $0 \geq m' - m_i$ e $0 \geq m'' - m_i$. Logo

$$S(f;Q) - S(f;P) = (m' - m_i)(\overline{x} - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - \overline{x}) \leq 0$$

Portanto, $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

Exercícios 1.2.1.

1)a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 5\}$

A é limitado inferior e superiormente já que se $x \in A$ tem-se que $-2 \leq x \leq 5$.

Neste caso é intuitivo pensarmos que -2 é ínfimo (e mínimo, pois $-2 \in A$) e que 5 é supremo (e máximo). De fato, -2 é cota inferior de A pela definição do conjunto A. Da mesma forma 5 é cota superior de A. Seja $\varepsilon > 0$.

Se $\varepsilon \geq 7$ então $-2+\varepsilon \geq -2+7 = 5$. Assim, tomando-se, por exemplo $x = 4 \in A$ temos $4 < 5 \leq -2+\varepsilon$.

Se $\varepsilon < 7$ então $-2+\varepsilon < -2+7 = 5$ e como $-2+\varepsilon > -2$ sabemos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $-2+\varepsilon > x_0 > -2$. Assim

$$-2 < x_0 < -2+\varepsilon < 5 \Rightarrow x_0 \in A.$$

Logo $-2 = \inf(A) = \min(A)$.

Da mesma forma mostra-se que $5 = \sup(A) = \max(A)$.

b) $B = \{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$

Primeiramente vamos verificar se B é limitado inferiormente. Note que como $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} \geq 0$ para qualquer natural n.Assim, qualquer número não positivo é cota inferior de B, por exemplo, -1. Logo B é limitado inferiormente.

Note que $\frac{n}{n+1}$ é estritamente crescente. De fato temos

$$\begin{array}{rcl} n^2+2n+1 & > & n^2+2n \\ (n+1)(n+1) & > & n(n+2) \\ \dfrac{(n+1)}{(n+2)} & > & \dfrac{n}{(n+1)} \\ \dfrac{(n+1)}{(n+1)+1} & > & \dfrac{n}{(n+1)} \end{array}$$

e note que 0 é elemento de B pois para $n = 0$ temos $\frac{0}{0+1} = 0$. Logo, zero é um cota inferior que pertence a B.

Portanto, $\inf(B) = \min(B) = 0$

Para verificar se B é limitado superiormente, perceba que como $n > n+1$ temos $\frac{n}{n+1} > 1$. Mas perceba que

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < \frac{100}{101} < \ldots < 1$$

Afirmação: $1 = \sup(B)$

De fato, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $1 < \varepsilon n_0 < \varepsilon(n_0+1)$. Assim

$$\begin{aligned} 1 + n_0 &< \varepsilon(n_0+1) + n_0 \\ 1 + n_0 - \varepsilon(n_0+1) &< n_0 \\ (n_0+1)(1-\varepsilon) &< n_0 \\ 1 - \varepsilon &< \frac{n_0}{n_0+1} \end{aligned}$$

Como $\frac{n_0}{n_0+1} \in B$, $1-\varepsilon$ não é cota superior, $\forall \varepsilon > 0$. Logo, $1 = \sup(B)$.

Note que 1 não pertence a B. Assim, B não tem máximo, apenas supremo.

2) $f(x) = -x^2 + 2$

a) $\sup\{x \in \mathbb{R}; -3 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Note que f é uma função contínua no intervalo definido. Pelo **teorema de Weirstress**, esta função admite um valor de máximo. Esboçando o gráfico desta função, você verificará que o valor de máximo é dado quando $x = 0$.

Assim, temos que $\sup\{x \in \mathbb{R}; -3 \leqslant x \leqslant 1\} = f(0) = 2$.

b) $\sup\{x \in \mathbb{R}; -3 \leqslant x \leqslant -1\}$.

Analogamente ao caso anterior, verificamos que:

$\sup\{x \in \mathbb{R}; -3 \leqslant x \leqslant -1\} = f(-1) = 1$.

3) Considere $f($ de f em $[\frac{3}{2}, 2]$ é dado em $x = \frac{3}{2}$. O máximo em f em $[2, \frac{5}{2}]$ é dado em $x = 2$. O máximo de f em $[\frac{5}{2}, 3]$ é dado em $x = \frac{5}{2}$.

Assim, $S(f,P)$, soma superior considerada é dada por:

$$\begin{aligned} S(f,P) &= f(1)(\frac{3}{2}-1) + f(\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2}) + f(2)(\frac{5}{2}-2) + f(\frac{5}{2})(3-\frac{5}{2}) \\ &= 1.0,5 + \frac{2}{3}.0,5 + \frac{1}{2}.0,5 + \frac{2}{5}.0,5 \\ &= \frac{77}{60}. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, veremos que $s(f,P)$, a soma inferior, é dada por:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= f(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}-1) + f(2)(2-\frac{3}{2}) + f(\frac{5}{2})(\frac{5}{2}-2) + f(3)(3-\frac{5}{2}) \\ &= \frac{2}{3}.0,5 + \frac{1}{2}.0,5 + \frac{2}{5}.0,5 + \frac{1}{3}.0,5 \\ &= \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

4) Seja $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, \text{ se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Note que esta função tem apenas um ponto de descontinuidade ($x = 2$). Além disso, $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,4]$, ou seja, f é limitada neste intervalo. Logo, pelo Teorema 1.4., f é integrável.

5) Note que $x^2 + y^2 = 4$ é a equação da circunferência com centro na origem e raio igual a 2. Verifique que a área do círculo correspondente a equação dada é equivalente a 4π.

Veja que $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$.

Como $x \in [0,2]$, segue que $y = \sqrt{4-x^2}$. Como a definição da integral está dada, notamos que a mesma está caracterizando a área do círculo restrita ao primeiro quadrante do sistema de coordenadas.

Assim, a definida integral, em termos de área, caracteriza um quarto da área do círculo, cuja circunferência tem centro na origem e o raio é 2. Portanto, notamos que $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \pi$.

6) Apresentado anteriormente.

1.2 lista 1.3.1, página 17

1) Soma de Riemann $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$

Quatro intervalos de mesmo comprimento nos fornecem os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 5$. Assim $x_i - x_{i-1}$ tem comprimento igual a 1.

A fórmula geral para esta soma de Riemann é $S_5 = \sum_{i=1}^{5} f(c_i)1$

a) $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$ e $c_4 = 5$. Assim $f(c_1) = 4$, $f(c_2) = 7$, $f(c_3) = 10$ e $f(c_4) = 13$. Logo

$$S_5(f) = \sum_{i=1}^{5} f(c_i)1 = 4 + 7 + 10 + 13 = 34.$$

b) $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ e $c_4 = 4$. Assim $f(c_1) = 1$, $f(c_2) = 4$, $f(c_3) = 7$ e $f(c_4) = 10$. Logo

$$S_5(f) = \sum_{i=1}^{5} f(c_i)1 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22.$$

c) $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$, $c_3 = \frac{7}{2}$ e $c_4 = \frac{9}{2}$. Assim $f(c_1) = \frac{5}{2}$, $f(c_2) = \frac{11}{2}$, $f(c_3) = \frac{17}{2}$ e $f(c_4) = \frac{23}{2}$. Logo

$$S_5(f) = \sum_{i=1}^{5} f(c_i)1 = \frac{5}{2} + \frac{11}{2} + \frac{17}{2} + \frac{23}{2} = \frac{56}{2} = 28.$$

2) (i) Note que f é contínua no intervalo $[0, 1]$ (na verdade, em todo $\mathbb{R}$). Logo pelo Teorema 1.3, f é integrável.

(ii) Para determinar $\int_0^1 x^2 dx$ dividiremos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, ou seja, $(x_i - x_{i-1})$ tem comprimento $\frac{1}{n}$. Assim a partição P obtida é da forma $P = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$. Escolhendo c_i como o extremo direito do intervalo $\left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$ temos $c_i = \dfrac{i}{n}$ e então $f(c_i) = \dfrac{i^2}{n^2}$. Assim

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{|P|\to 0} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

3) (i) Note que f é contínua em qualquer intervalo $[a, b]$. Logo, novamente pelo Teorema 1.3, f é integrável.

(ii) Para determinar a $\int_b^a e^x dx$ dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento e formaremos os $S_n(f)$ e escolheremos c_i como o extremo inferior de cada subintervalo da partição P e calcularemos

$$\lim_{|p|\to 0} S_n(f)$$

que corresponde a $\int_b^a e^x dx$.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$P = \left\{a, a + \frac{(b+a)}{n}, a + 2\frac{(b+a)}{n}, ..., a + (n-1)\frac{(b+a)}{n}, a + n\frac{(b+a)}{n} = b\right\}$$

como a participação que consiste em dividir $[a, b]$ em n partes iguais de comprimento $\frac{(b+a)}{n}$.

Para cada subintervalo

$$\left[a + (i-1)\frac{(b+a)}{n}, a + i\frac{(b+a)}{n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
c_i &= a + (i-1)\,\frac{(b+a)}{n} \\
f(c_i) &= e^{a+(i-1)\frac{(b+a)}{n}}
\end{aligned}
$$

Assim, a soma de Riemann é

$$
\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= e^a \cdot \frac{(b+a)}{n} + e^{a+\frac{(b+a)}{n}} \cdot \frac{(b+a)}{n} + ... + e^{a+(n-1)\frac{(b+a)}{n}} \cdot \frac{(b+a)}{n} \\
&= e^a \cdot \frac{(b-a)}{n}\left(1 + e^{\frac{(b-a)}{n}} + e^{2\frac{(b-a)}{n}} + \cdots + e^{(n-1)\frac{(b-a)}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

Observe que os termos entre colchetes são a soma da PG de razão $e^{\frac{(b-a)}{n}}$.

Então,

$$
S_n(f) = e^a \cdot \frac{(b-a)}{n}\left(1 + e^{\frac{(b-a)}{n}} + e^{2\frac{(b-a)}{n}} + \cdots + e^{(n-1)\frac{(b-a)}{n}}\right) = e^a \cdot \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{e^{n\frac{(b-a)}{n}} - 1}{e^{\frac{(b-a)}{n}} - 1}\right)
$$

Observe que fazer $n \to \infty$, é fazer $\dfrac{(b-a)}{n} \to 0$.

Então,

$$
\lim_{|p|\to 0} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{\Delta x \to 0} S_n(f),
$$

onde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0} S_n(f) &= e^a \Delta x \left(\frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\right) \\
&= e^a \left(\frac{\Delta x e^{n\Delta x} - \Delta x}{e^{\Delta x} - 1}\right) \\
&= e^a \left(\frac{\Delta x e^{n\Delta x}}{e^{\Delta x} - 1} - \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}\right) \\
&= e^a \left(\frac{\Delta x e^{n\frac{(b-a)}{n}}}{e^{\Delta x} - 1} - \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}\right) \\
&= e^a \left(\frac{e^{(b-a)}}{\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}} - \frac{1}{\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}\right)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln e
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} S_n(f) &= e^a \left(\frac{e^{(b-a)}}{\ln e} - \frac{1}{\ln e} \right) \\
&= e^a \left(e^{(b-a)} - 1 \right) \\
&= e^b - e^a
\end{aligned}
$$

1.3 lista 1.4.1, página 20

1) Como o intervalo de integração é degenerado, isto é, consiste em apenas um ponto pois vai de 3 até 3, concluímos imediatamente que

$$\int_3^3 xsen(x^2)dx = 0.$$

2)a) Como as três integrais têm como integrando a mesma função $f(x)$, podemos aplicar o Teorema 1.9 duas vezes, de modo que

$$\begin{aligned} \int_2^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx &= \int_2^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx \\ &= \int_2^{10} f(x)dx. \end{aligned}$$

b) No início da Seção 1.4 definimos que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Usando este resultado juntamente com o Teorema 1.9 concluímos que

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x)dx - \int_5^3 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx &= \int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx \\ &= \int_2^7 f(x)dx. \end{aligned}$$

3) Pelo Teorema 1.8

$$\int_1^3 2f(t)dt = 2\int_1^3 f(t)dt.$$

Além disso,

$$\int_1^3 f(t)dt = \int_0^4 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt - \int_3^4 f(t)dt.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por 2 e usando as hipóteses do exercício obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_1^3 f(t)dt &= 2\int_0^4 f(t)dt - 2\int_0^1 f(t)dt - 2\int_3^4 f(t)dt \\ \int_1^3 2f(t)dt &= 2(-2) - 2\cdot 1 - 2\cdot 2 = -10. \end{aligned}$$

4) Seja $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Toda soma de Riemann da função f é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),\ \ c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Como f é integrável em $[a, b]$ existe

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

independentemente da escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, e

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.1}$$

Analogamente, existe

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

independentemente da escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)dx. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) concluuimos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + g(c_i)(x_i - x_{i-1})] \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(c_i) + g(c_i))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_a^b [f(x) + g(x)]dx.
\end{aligned}$$

Portanto $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx.$$

1.4 lista 1.5.1, página 24

1)a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2x + x^4 dx = \int_{-2}^{2} 2x dx + \int_{-2}^{2} x^4 dx = x^2|_{-2}^{2} + \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{2} =$
$\displaystyle= (2^2 - (-2)^2) + \left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5}\right) = (4-4) + \left(\frac{32}{5} + \frac{32}{5}\right) = \frac{64}{5}.$

b) Defina $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$. Note que $f'(x) = \cos 2x$.
Assim, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 2x dx = \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = 0.$

c) $\displaystyle\int_0^1 3e^{2x} dx = 3\int_0^1 e^{2x} dx = 3\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 = 3\left(\frac{e^{2.1}}{2} - \frac{e^{2.0}}{2}\right) = 3\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2}\right)=$
$=\frac{3}{2}(e^2 - 1).$

d) Lembre que $3^t = e^{\ln 3^t} = e^{t\ln 3}$.
Se $f(t) = \frac{e^{t\ln 3}}{\ln 3}$, temos $f'(t) = e^{t\ln 3} = 3^t$.
Assim, $\displaystyle\int_0^1 3^t dt = \left.\frac{e^{t\ln 3}}{\ln 3}\right|_0^1 = \frac{e^{1\ln 3}}{\ln 3} - \frac{e^{0\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}(e^{\ln 3} - 1) = \frac{3-1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}.$

2)a) Usando o **Teorema 1.11**, considere em $G(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$, a função $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.
Assim, $G'(x) = g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

b) $\displaystyle F(x) = \int_x^3 \ln t^2 dt = -\int_3^x \ln t^2 dt.$
Esta transformação é necessária para que a aplicação do **Teorema 1.11** seja possível.
Faça $g(t) = \ln t^2$.
Defina $G(x) = \displaystyle\int_3^x \ln t^2 dt$. Note que $F(x) = -G(x)$.
Assim, como $G(x) = \displaystyle\int_3^x \ln t^2 dt$, segue que $G'(x) = \ln x^2$.
Com tudo isso, conclui-se que $F'(x) = -G'(x) = -\ln x^2$.

c) Seja $H(x) = \displaystyle\int_2^{e^{-x}} \cos t dt$.
Note que $H'(x) = \frac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{e^{-x}} \cos t dt$.
Faça $u = e^{-x}$.
$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^{-x}$. Assim,
$\displaystyle H'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^{e^{-x}} \cos t dt = \left(\frac{d}{du}\int_2^u \cos t dt\right)\frac{du}{dx} = (\cos u)(-e^{-x}) = -e^{-x}\cos e^{-x}.$

3) Note que: $|x-4|$ é definido por $x-4$, se $x-4 \geq 0$, e se $x-4<0$, a definição de $|x-4|$ é dada por $x-4<0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{6} |x-4|dx &= \int_{-3}^{4} (-x+4)dx + \int_{4}^{6} (x-4)dx \\
&= \int_{-3}^{4} -xdx + \int_{-3}^{4} 4dx + \int_{4}^{6} xdx + \int_{4}^{6} -4dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\bigg|_{-3}^{4} + 4x|_{-3}^{4} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{4}^{6} + -4x|_{4}^{6} \\
&= \left(-\frac{4^2}{2} + \frac{(-3)^2}{2}\right) + (4.4 - 4.(-3)) + \left(\frac{6^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right) + (-4.6 + 4.4) \\
&= -3,5 + 28 + 10 - 8 = 26,5 = \frac{53}{2}.
\end{aligned}$$

1.5 lista 1.6.1, página 27

1)a)

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + x^4 + 1)dx &= \int 3x^2 dx + \int x^4 dx + \int 1dx \\ &= 3\int x^2 dx + \int x^4 dx + \int dx \\ &= \left(3\frac{x^3}{3} + c_1\right) + \left(\frac{x^5}{5} + c_2\right) + (x + c_3) \\ &= x^3 + \frac{x^5}{5} + x + c, \quad c = c_1 + c_2 + c_3.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3+9}{t^2} dt &= \int \frac{t^3}{t^2} + \frac{9}{t^2} dt \\ &= \int tdt + 9\int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \int tdt + 9\int t^{-2} dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + c_1\right) + (9(-t^{-1}) + c_2) \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{9}{t} + c, \quad c = c_1 + c_2.\end{aligned}$$

c)

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

d) Usando a propriedade

$$log(a^b) = b \cdot log(a),$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 ln(x)}{ln(x^2)}dx &= \int \frac{x^2 ln(x)}{2ln(x)}dx\\ &= \int \frac{x^2}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + c\\ &= \frac{x^3}{6} + c.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int \frac{sen(x)}{1 - sen^2(x)}dx &= \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)dx}\\ &= \int tg(x)sec(x)dx\\ &= sec(x) + c.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{4}{1-x^2}}dx &= \int 2\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx\\ &= 2\int \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx\\ &= 2arcsen(x) + c.\end{aligned}$$

2)a)

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}ln(1+x^2) + c\right]' &= \frac{1}{2}[ln(1+x^2)]' + c'\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)\\ &= \frac{x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}ln(1+x^2) + c.$$

b)

$$
\begin{aligned}
[e^x(x^2-2x+2)+c]' &= [e^x(x^2-2x+2)]' + c' \\
&= e^x(x^2-2x+2) + e^x[x^2-2x+2]' \\
&= e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) \\
&= e^x x^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int e^x x^2 dx = e^x(x^2-2x+2)+c.$$

c)

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+c\right]' &= \left[\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}\right]' + c' \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right]' \\
&= \frac{1}{4}\frac{[1\cdot\sqrt{4-x^2}] - \left[x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)\right)\right]}{(\sqrt{4-x^2})^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+c.$$

3) Pelo Teorema 1.11 (Página 23 do livro texto), para encontrar a função $f(x)$, basta derivar a função que está a direita da igualdade:

$$\left[3sen(x)+2\sqrt{x}-\frac{1}{3x^6}+c\right]' = 3cos(x)+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^7}.$$

4)a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (e^{2x}+x^2)dx &= \int_0^2 e^{2x}dx + \int_0^2 x^2 dx \\
&= \int_0^2 (e^2)^x dx + \int_0^2 x^2 dx.
\end{aligned}
$$

Escreva $e^2 = a$ para obter,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (a)^x dx + \int_0^2 x^2 dx &= \left.\frac{a^x}{ln(a)}\right|_0^2 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 \\ &= \left[\frac{a^2}{ln(a)} - \frac{a^0}{ln(a)}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^2}{3}\right] \\ &= \frac{1}{ln(a)}(a^2 - 1) + \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Por fim, desfazendo a substituição resulta

$$\int_0^2 (e^{2x} + x^2)dx = \frac{1}{ln(e^2)}(e^4 - 1) + \frac{8}{3}.$$

Mas, $ln(e^2) = 2 \cdot ln(e) = 2$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^2 (e^{2x} + x^2)dx &= \frac{e^4 - 1}{2} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{3e^4 - 3 + 16}{6} \\ &= \frac{3e^4 + 13}{6}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3cos(\theta) + 2\theta\ d\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3cos(\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\ d\theta) \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\ d\theta \\ &= 3sen(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left.\frac{\theta^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 3\left(sen(\frac{\pi}{2}) - sen(0)\right) + \left(\frac{\pi^2}{2^2} - 0^2\right) \\ &= 3 + \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

1.6 lista 1.7.2, página 32

1) Não esqueça que como estamos resolvendo integrais INDEFINIDAS, temos $\int f(x) = F(x) + c$ onde $F'(x) = f(x)$

a) $\int \sqrt[3]{3x-1}dx = \int (3x-1)^{\frac{1}{3}}dx$

Tomando $u = 3x - 1$ tem-se $du = 3dx$. Logo

$$\begin{aligned}
\int (3x-1)^{\frac{1}{3}}dx &= \int (u)^{\frac{1}{3}}\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}}du \\
&= \frac{1}{3}\left(u^{\frac{4}{3}}\frac{3}{4} + c\right) \\
&= \frac{1}{4}u^{\frac{4}{3}} + c \\
&= \frac{1}{4}(3x-1)^{\frac{4}{3}} + c \\
&= \frac{1}{4}(3x-1)^{\frac{4}{3}} + c
\end{aligned}$$

Note que buscamos uma substituição que seja conveniente aos dados apresentados.

b) $\int \cos(5x+2)dx =$

Tomando $u = 5x + 2$ tem-se $du = 5dx$. Logo

$$\begin{aligned}
\int \cos(5x+2)dx &= \int \cos(u)\frac{du}{5} \\
&= \frac{1}{5}\int \cos(u)du \\
&= \frac{1}{5}[sen(u) + c] \\
&= \frac{1}{5}sen(5x+2) + c
\end{aligned}$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

Tomando $u = x^2 + 4$ tem-se $du = 2xdx$. Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du \\
&= \frac{1}{2}\left(u^{\frac{1}{2}}2 + c\right) \\
&= \sqrt{u} + c \\
&= \sqrt{x^2+4} + c
\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$

Tomando $u = \ln x$ tem-se $du = \frac{1}{x}dx$. Logo

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2|x|}{2} + c$$

e) $\int cotg(x)dx = \int \dfrac{\cos(x)}{sen(x)}dx = \int \dfrac{1}{sen(x)}\cos(x)dx$

Tomando $u = sen(x)$ tem-se $du = \cos(x)dx$. Logo

$$\begin{aligned}
\int cotg(x)dx &= \int \frac{1}{sen(x)}\cos(x)dx \\
&= \int \frac{1}{u}du \\
&= \ln(u) + c \\
&= \ln|sen(x)| + c
\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+16} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{16}+1} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{4}\right)^2+1}$

Tomando $u = \dfrac{x+2}{4}$ tem-se $du = \frac{1}{4}dx$. Logo

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \frac{1}{16}\int \frac{4du}{(u)^2+1} = \frac{1}{4}\left[\arctan(u) + c\right] = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+2}{4}\right) + c$$

2)a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2dx.$$

Portanto os novos extremos de integração ficam:

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow u = 0 \\ x &= 2 \Rightarrow u = 8 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}dx &= \int_0^8 \frac{1}{u+1}\frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{1}{u+1}du \\ &= \frac{1}{3}\left[\ln|u+1||_0^8\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\ln|8+1| - \ln|0+1|\right] \\ &= \frac{1}{3}\ln 9 \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3dx}{x\ln^2(3x)}dx$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$u = \ln(3x) \Rightarrow du = \frac{1}{3x}\cdot 3 \Rightarrow du = \frac{1}{x}.$$

Portanto os novos extremos de integração ficam:

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow u = \ln 3 \\ x &= 2 \Rightarrow u = \ln 6 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3dx}{x\ln^2(3x)}dx &= 3\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{1}{u^2}du \\
&= 3\left[-\frac{1}{u}\Big|_{\ln 3}^{\ln 6}\right] \\
&= -3\left[\frac{1}{\ln 6} - \frac{1}{\ln 3}\right] \\
&= -\frac{3}{\ln 6} + \frac{3}{\ln 3}
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_1^2 xe^{3x^2}dx$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$u = 3x^2 \Rightarrow du = 6xdx \Rightarrow \frac{du}{6} = xdx.$$

Portanto, os novos extremos de intregração ficam:

$$\begin{aligned}
x &= 1 \Rightarrow u = 3 \\
x &= 2 \Rightarrow u = 12
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 xe^{3x^2}dx &= \int_3^{12} e^u \frac{du}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left[e^u\big|_3^{12}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[e^{12} - e^3\right]
\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^3 2x3^{x^2}dx$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Portanto, os novos extremos de integração ficam:

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow u = 0 \\ x &= 3 \Rightarrow u = 9 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^3 2x3^{x^2}dx &= \int_0^9 3^u du \\ &= \left.\frac{3^u}{\ln 3}\right|_0^9 \\ &= \frac{3^9}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} \\ &= \frac{3^9 - 1}{\ln 3} \end{aligned}$$

3) $\int \sec x dx$

Vamos usar a sugestão e escrever:

$$\sec(x) = \sec(x)\frac{(\sec(x) + \tan(x))}{(\sec(x) + \tan(x))}$$

Então, a integral fica:

$$\begin{aligned} \int \sec(x)dx &= \int \sec(x)\frac{(\sec(x) + \tan(x))}{(\sec(x) + \tan(x))}dx \\ &= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)}dx. \end{aligned}$$

Considere a mudança de variável

$$u = \sec(x) + \tan(x) \Rightarrow du = \left[\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)\right] dx.$$

Então:

$$\int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c.$$

Voltando à variável original resulta que:

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c$$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$

Vamos dividir o numerador e o denominador do integrando por $\frac{1}{a^2}$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2}dx &= \int \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx
\end{aligned}$$

Considere agora a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{x}{a} \Rightarrow du = \frac{dx}{a} \Rightarrow adu = dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{u^2+1}dx \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1}dx \\
&= \frac{1}{a}\arctan u + c \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c
\end{aligned}$$

1.7 lista 1.7.4, página 36

1)a) $\int x^2 e^x dx.$

Considere $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$. Pelo método da INTEGRAL POR PARTES, vimos que:
$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx.$
Calcula-se $\int 2xe^x dx.$
Considere $h(x) = 2x$ e $g'(x) = e^x$.
Pelo método da INTEGRAL POR PARTES,
$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x.$
Assim, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2).$
Por estarmos tratando de PRIMITIVAS, vimos que:
$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + k$, onde k é um número real.

b) $\int (x-3)\sec^2 x dx.$

Note que: $\int (x-3)\sec^2 x dx = \int x\sec^2 x dx - \int 3\sec^2 x dx.$
Lembre que se $f(x) = \tan x$, então, $f'(x) = \sec^2 x$.
Aplique o método da INTEGRAL POR PARTES em $\int x\sec^2 x dx$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int (x-3)\sec^2 x dx &= \int x\sec^2 x dx - 3\int sec^2 x dx \\
&= \left(x\tan x - \int \tan x dx\right) - 3\tan x \\
&= (x\tan x - \ln|\sec x|) - 3\tan x \\
&= (x-3)\tan x - \ln|\sec x|.
\end{aligned}$$

Por ser PRIMITIVA, temos que:
$\int (x-3)\sec^2 x dx = (x-3)\tan x - \ln|\sec x| + k$, onde k é um número real.

c) $\displaystyle\int x^4 \ln x dx.$

Tome $f'(x) = x^4$ e $g(x) = \ln x$. Usando INTEGRAL POR PARTES,
$\displaystyle\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int x^4 5 dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25}.$
Assim, $\displaystyle\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + k$, onde k é um número real.

d) $\displaystyle\int \arctan x dx.$

Use o método da INTEGRAL POR PARTES:

Para isto, faça $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$. Assim,
$\displaystyle\int \arctan x dx = \int 1 \arctan x dx = x\arctan x - \int x.\frac{1}{x^2+1}dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}dx.$
Note que se $h(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2}$, então, $h'(x) = \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$. Assim,
$\displaystyle\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x\arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + k$, onde k é um número real.

e) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)dx.$

Faça $f'(x) = 1$ e $g(x) = \ln(x^2+1)$. Usando o método da INTEGRAL POR PARTES:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x^2+1)dx &= \int 1\ln(x^2+1)dx \\
&= x\ln(x^2+1) - \int x.\frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{X^2+1}dx \\
&= x\ln(x^2+1) - 2\int 1 - \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= x\ln(x^2+1) - 2\left(\int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx\right) \\
&= x\ln(x^2+1) - 2(x - \arctan x) \\
&= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x.
\end{aligned}$$

Por tratarmos de PRIMITIVA, temos que:

$\int \ln{(x^2+1)}dx = x\ln{(x^2+1)} - 2x + 2\arctan x + k$, onde k é um número real.

f) $\int \sec^3 x dx$.

Note que $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$.

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \int \sec x . \sec^2 x dx \\
&= \int \sec x .(\tan^2 x + 1) dx \\
&= \int \sec x . \tan^2 x dx + \int \sec x dx \\
&= \int \sec x . \tan x . \tan x dx + \int \sec x dx.
\end{aligned}$$

Tome $f'(x) = \sec x . \tan x$ (Note que: $f(x) = \sec x$).

Além disso, $g(x) = \tan x$.

Usando o método da INTEGRAL POR PARTES, temos:

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \int \sec x . \tan x . \tan x dx + \int \sec x dx \\
&= \left(\sec x . \tan x - \int \sec x . \sec^2 x dx \right) + \int \sec x dx \\
&= \sec x . \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x|.
\end{aligned}$$

Assim, $2\int \sec^3 x dx = \sec x . \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$. Portanto,

$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}.(\sec x . \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + k$, onde k é um número real.

2)a) $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx.$

$$\begin{aligned}\int_1^2 xe^x dx &= xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx\\ &= 2e^2 - 1e^1 - (e^x|_1^2)\\ &= 2e^2 - e - (e^2 - e^1)\\ &= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos 2x dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos 2x dx &= (x+1)\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} dx\\ &= \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{\sin\pi}{2} - 1\frac{\sin 0}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx\\ &= \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{0}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx\\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi} \sin x(\sin^2 x) dx\\ &= \int_0^{\pi} \sin x(1-\cos^2 x) dx\\ &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx\\ &= -\cos x|_0^{\pi} - \left(-\frac{\cos^3 x}{3}\ |_0^{\pi}\right)\\ &= -\cos x|_0^{\pi} + \frac{\cos^3 x}{3}\bigg|_0^{\pi}\\ &= -\cos\pi + cos0 + \frac{\cos^3\pi}{3} - \frac{\cos^3 0}{3}\\ &= -(-1) + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx.$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx &= \int_1^2 \ln x . x^{-2}dx \\
&= -x^{-1}.\ln x|_1^2 - \int_1^2 -x^{-1}.\frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln 2 + 1\ln 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln 2 + \left(-\frac{1}{x}\ |_1^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int \sin^n x dx.$

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x dx &= \int \sin x . \sin^{n-1} x dx \\
&= (-\cos x).\sin^{n-1} x - \int (-\cos x).(n-1).\sin^{n-2} x.\cos x dx \\
&= -\cos x.\sin^{n-1} x + \int (n-1).\cos^2 x.\sin^{n-2} x dx \\
&= -\cos x.\sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx \\
&= -\cos x.\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx.
\end{aligned}$$

Verifique que:
$\displaystyle\int \sin^n x dx + (n-1)\int \sin^n x dx = -\cos x.\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx.$ Assim,
$\displaystyle n\int \sin^n x dx = -\cos x.\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx.$ Temos, portanto, que:
$\displaystyle\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x.\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$

4) $\displaystyle\int_a^b (b-x)f''(x)dx.$
Note que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (b-x)f''(x)dx &= (b-x)f'(x)|_a^b - \int_a^b -f'(x)dx \\
&= (b-x)f'(x)|_a^b + \int_a^b f'(x)dx.
\end{aligned}$$

Além disso,
$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b 1f'(x)dx = 1f(x)|_a^b - \int_a^b 0f(x)dx = f(x)|_a^b.$
Assim,

$$\begin{aligned}\int_a^b (b-x)f''(x)dx &= (b-x)f'(x)|_a^b + \int_a^b f'(x)dx \\ &= (b-b)f'(b) - (b-a)f'(a) + f(x)|_a^b \\ &= -(b-a)f'(a) + f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Com isso,vimos que:
$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f''(x)dx.$

1.8 lista 1.8.1, página 40

1)a) Fazendo a intersecção dos dois gráficos observamos que

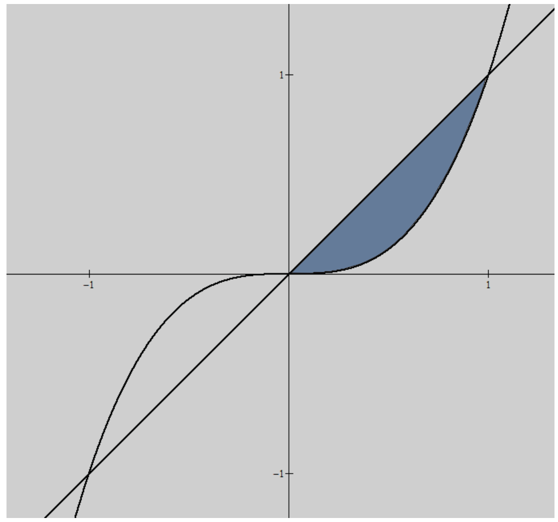

Figura 1.1: Exercício-1)a)

$$
\begin{aligned}
x^3 &= x \\
x^3 - x &= 0 \\
x(x^2 - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, os gráficos de cruzam quando $x = 0$ e quando

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= 0 \\
x^2 &= 1 \\
x &= 1.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, a área da região delimitada polos gráficos das funções é dada por

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^3 dx &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Logo a área procurada é $\frac{1}{4} au$.

b) As retas $y = 6 + x$ e $y = -\frac{x}{2}$ se interceptam em $x = 4$. A reta $y = 6 + x$

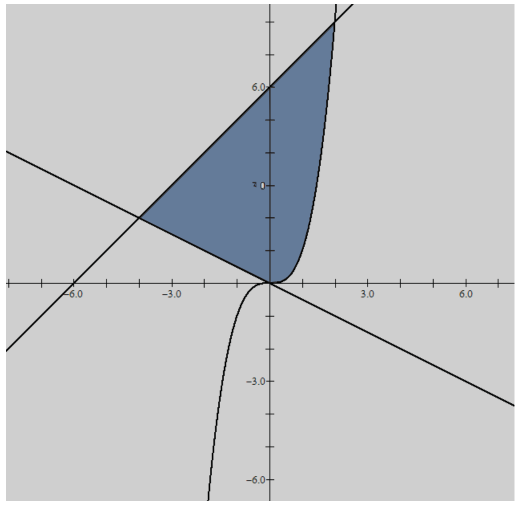

Figura 1.2: Exercício-1)b)

e a curva $y = x^3$ se interceptam em $x = 2$ e a reta $y = -\dfrac{x}{2}$ e a curva $y = x^3$ se interceptam em $x = 0$. Desse modo, podemos dividir a área A delimitada pelas funções em duas regiões A_1 e A_2, situadas à esquerda e à direita, respectivamente, do eixo y. Com isso escrevemos

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= \left[\int_{-4}^{0} 6 + x dx - \int_{-4}^{0} -\frac{x}{2} dx\right] + \left[\int_{0}^{2} 6 + x dx - \int_{0}^{2} x^3 dx\right] \\ &= \left[6x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right]_{-4}^{0} + \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 22ua. \end{aligned}$$

c) Neste caso vamos dividir a área total em duas parte segunda a reta $x = 1$, onde a reta $y = x$ e a curva $y = \dfrac{1}{x}$ se interceptam. Assim temos

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= \left[\int_{0}^{1} x dx - \int_{0}^{1} 0 dx\right] + \left[\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx - \int_{1}^{2} 0 dx\right] \\ &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} + ln(x)|_{1}^{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + ln(2)\right) ua. \end{aligned}$$

d) Note que as retas $x = 1$ e $x = 2$ determinam os limites de integração, de modo

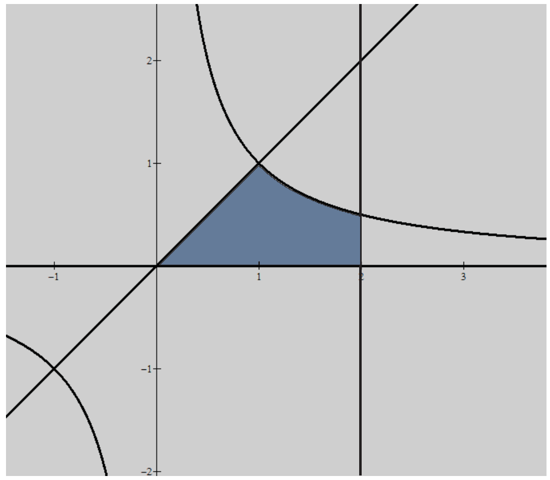

Figura 1.3: Exercício-1)c)

que a área da região é simplesmente

$$
\begin{aligned}
A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^2 x^{-2}d \\
= -x^{-1}|_1^2 \\
= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}au.
\end{aligned}
$$

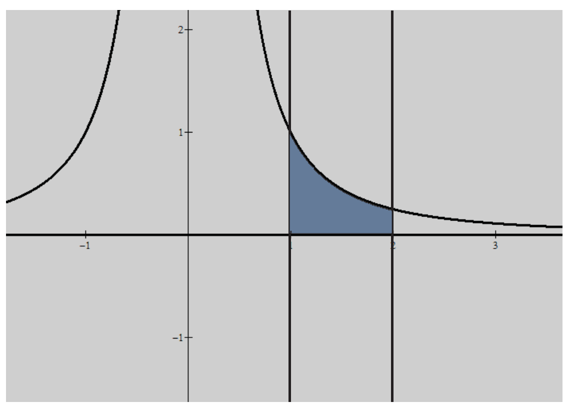

Figura 1.4: Exercício-1)d)

e) Fazendo a intersecção das curvas $y = cos(x)$ e $y = sen(2x)$ vem

$$
\begin{aligned}
cos(x) &= sen(2x) \\
cos(x) &= 2sen(x)cos(x) \\
sen(x) &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow x &= 30^o = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} cos(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} sen(2x)dx = sen(x)|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left.\frac{cos(2x)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}au.$$

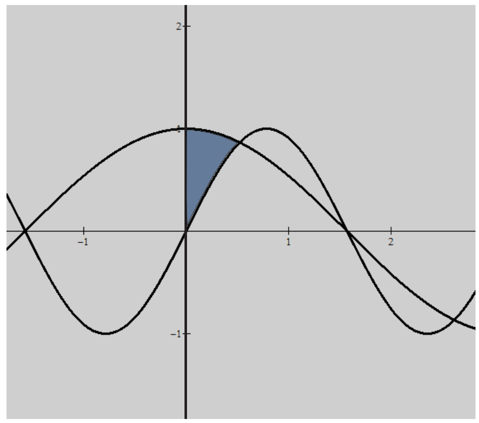

Figura 1.5: Exercício-1)e)

f) Neste caso vamos tentar dividir a área total em um número maior de regiões. Façamos $A = I + II + III + IV$ como mostra a Figura. Segue que,

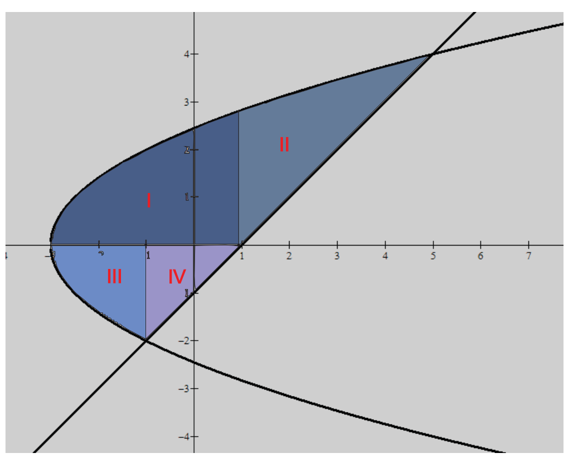

Figura 1.6: Exercício-1)f)

$$I = \int_{-3}^{1} \sqrt{2x+6}dx = \frac{1}{2}\int_0^8 \sqrt{u}du,$$

fazendo $u = 2x + 6$. Logo

$$I = \frac{1}{3}8\sqrt{8}.$$

Para a região II temos

$$\begin{aligned} II = \int_1^5 \sqrt{2x+6}dx - \int_1^5 x - 1dx &= \frac{1}{2}\int_8^{16} \sqrt{u}du - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{3}[\sqrt{16^3} - \sqrt{8^3}] - 8 \\ &= \frac{1}{3}[16 \cdot 4 - 8\sqrt{8}] - 8 \end{aligned}$$

Pela simetria da curva $y^2 = 2x + 6$ em relação ao eixo x, para calcular a área da região III é equivalente a calcular a integral

$$III = \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{u}du = \frac{8}{3}.$$

Assim como a região III, a região IV também está abaixo do eixo x. Mas podemos escrever

$$\begin{aligned} IV = \int_{-1}^1 |x-1|dx &= -\int_{-1}^1 x - 1dx \\ &= \int_{-1}^1 -x + 1dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^1 = 2. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} A = I + II + III + IV &= \left(\frac{1}{3}8\sqrt{8}\right) + \left(\frac{1}{3}[16 \cdot 4 - 8\sqrt{8}] - 8\right) + \left(\frac{8}{3}\right) + (2) \\ &= 18ua. \end{aligned}$$

2)a)

$$\begin{aligned} A_S &= \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}ua. \end{aligned}$$

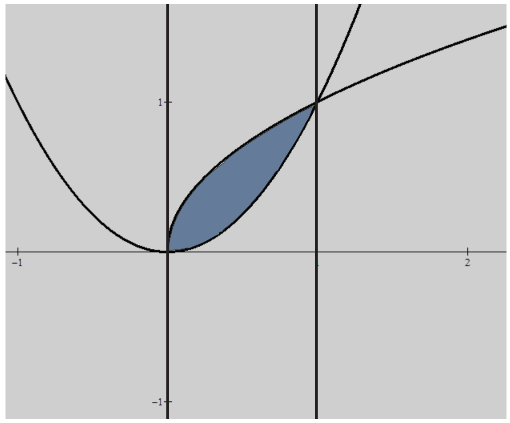

Figura 1.7: Exercício-2)a)

b)

$$
\begin{aligned}
A_S &= \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} ua.
\end{aligned}
$$

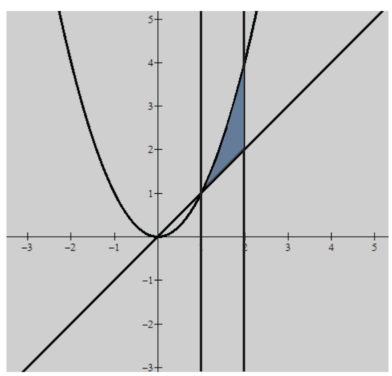

Figura 1.8: Exercício-2)b)

c) Como a região está definida para todo $x \geq 0$, percisamos encotrar os pontos de intersecção das curvas $y = x^3 - x$ e $y = -x^2 + 5x$:

$$
\begin{aligned}
x^3 - x &= -x^2 + 5x \\
x^3 + x^2 - 6x &= 0 \\
x(x^2 + x - 6) &= 0.
\end{aligned}
$$

Segue que as curvas tem pontos comuns em $x = 0$ e para x satisfazendo

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

ou seja, para $x = -3$ e $x = 2$. Portanto,

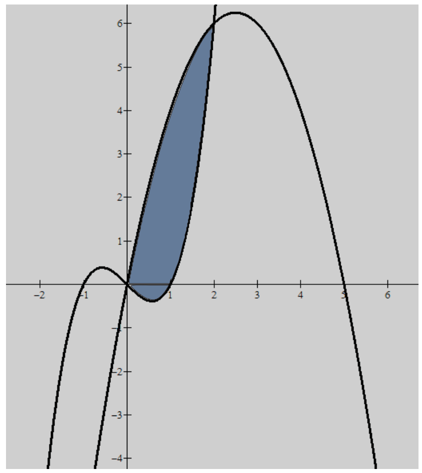

Figura 1.9: Exercício-2)c)

$$\begin{aligned} A_S &= \int_0^2 -x^2 + 5x dx - \int_0^2 x^3 - x dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{16}{3} au. \end{aligned}$$

1.9 lista 1.9.1, página 51

1)a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x}{x^2+1}dx$$

Vamos utilizar a mudança de variável para resolver esta integral imprópria. Observe que fazendo

$$x^2+1 = u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}.$$

E, calculando os novos extremos de integração, resulta que:

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 1^2+1 = 2 \\ x &= t \Rightarrow t^2+1 \end{aligned}$$

Então, a integral em questão fica:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\int_2^{t^2+1} \frac{1}{u}\frac{du}{2} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_2^{t^2+1}\frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \ln u\big|_2^{t^2+1} du \end{aligned}$$

Voltando à variável original, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^t &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(t^2+1\right)-\ln(2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2}{1+4t^2}dx$

Primeiro observe que podemos escrerver esta integral como:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2}{1+4t^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{2}{1+(2t)^2}dx + \int_0^\infty \frac{2}{1+(2t)^2}dx \qquad (1.3)$$

Vamos usar uma mudança de variável para calcular esta integral. Fazendo

$$u = 2t \Rightarrow du = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}.$$

Então a integral (1.3) fica:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{1+u^2}\frac{du}{2} + \int_{0}^{\infty} \frac{2}{1+u^2}\frac{du}{2} \\
&\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+u^2}du + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Agora precisamos mostrar que cada uma das integrais em (1.4) converge. Vamos considerar primero

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+u^2}du &= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{0} \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \lim_{t\to\infty} \arctan u|_{-t}^{0} \\
&= \lim_{t\to\infty} [\arctan 0 - \arctan(-t)] \\
&= \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

De modo análogo mostra-se que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du$ converge para $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, temos que:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+u^2}du + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Assim, a integral converge para π.

c) $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2}dx$

Vamos usar a mudança de variável $u = x - 2$. Segue, então que:

$$du = dx$$

E os novos extremos de integração são:

$$\begin{aligned}
x &= 3 \Rightarrow u = 3 - 2 = 1 \\
x &\to \infty \Rightarrow u \to \infty
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^2}dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^t u^{-2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} -u^{-1}\Big|_1^t \\
&= -\lim_{t\to\infty} u^{-1}\Big|_1^t \\
&= -\lim_{t\to\infty} \left(t^{-1}-1^{-1}\right) \\
&= -\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}-1\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Portanto a integral converge para 1.

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}dx$

Vamos dividir o numerador e o denominador do integrando por a^2, note que só podemos fazer isso pois $a \neq 0$, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} &= \int_0^\infty \frac{\frac{1}{a^2}dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\frac{x}{a} = u \Rightarrow \frac{dx}{a} = du \Rightarrow dx = adu,$$

resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{a}{u^2+1}du &= \frac{1}{a}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{1}{a}\lim_{t\to\infty} \arctan u\big|_0^t \\
&= \frac{1}{a}\lim_{t\to\infty}(\arctan t - \arctan 0) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\
&= \frac{\pi}{2a}
\end{aligned}$$

Portanto, a integral converge para $\frac{\pi}{2a}$.

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} &= \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} xe^{-x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left.\frac{e^{-x^2}}{2}\right|_{-t}^{0} + \lim_{t\to\infty}\left.\frac{e^{-x^2}}{2}\right|_{0}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-0^2}}{2}-\frac{e^{-(-t)^2}}{2}\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-(-t)^2}}{2}-\frac{e^{-0^2}}{2}\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{0}}{2}-\frac{e^{-t^2}}{2}\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-t^2}}{2}-\frac{e^{0}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}-0+0-\frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, a integral converge para 0.

f) $\displaystyle\int_0^1 \ln z dz$

Aqui vamos usar a integração por partes, mas para isso é preciso perceber que a função pode ser escrita como segue

$$\int_0^1 1\cdot \ln z dz$$

Agora, seja

$$f(z) = \ln z \text{ e } g'(z) = 1$$

Então, pela fórmula da integração por partes temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1 \cdot \ln z dz &= \lim_{t \to 0} \int_t^1 1 \cdot \ln z dz \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\ln z \cdot z|_t^1 - \int_0^1 z \cdot \frac{1}{z} dz \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\ln z \cdot z|_t^1 - \int_t^1 dz \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\ln 1 \cdot 1 - \ln t \cdot t - 1 - t \right] \\
&= 0 - 0 - 1 - 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Portanto, a integral converge para -1.

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$

A função racional $\frac{1}{x^2+5x+6}$ é própria. Decompondo o polinômio do denominador temos:

$$q(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Como $q(x)$ tem fatores lineares distintos, então a função racional corresponde a uma soma de duas frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+3}.$$

Para determinar A_1 e A_2, vamos multiplicar ambos os lados da equação acima por $(x+2)(x+3)$, obtemos assim

$$\begin{aligned}
1 &= A_1(x+3) + A_2(x+2) \\
&= x(A_1 + A_2) + 3A_1 + 2A_2
\end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ 3A_1 + 2A_2 = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema temos que:

$$A_1 = -A_2$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$3A_1 - 2A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1$$

Portanto,

$$A_2 = -1.$$

Logo, a decomposição em frações parciais é:

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}dx &= \int_0^\infty \frac{1}{x+2}dx - \int_0^\infty \frac{1}{x+3}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+2}dx - \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+3}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(x+2)|_0^t - \lim_{t\to\infty} \ln(x+3)|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} [\ln(t+2) - \ln(2)] - \lim_{t\to\infty} [\ln(t+3) - \ln(3)] \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(t+2) - \lim_{t\to\infty} \ln(2) - \lim_{t\to\infty} \ln(t+3) + \lim_{t\to\infty} \ln(3) \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(t+2) - \lim_{t\to\infty} \ln(t+3) - \lim_{t\to\infty} \ln(2) + \lim_{t\to\infty} \ln(3)
\end{aligned}$$

Usando a propriedade da diferença de logaritmos temos:

$$\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{t+2}{t+3}\right) + \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Observe que quando $t \to \infty$, $\frac{t+2}{t+3} \to 1$.

Portanto a equação acima fica:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx &= \lim_{t\to\infty} \ln 1 + \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 0 + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \\
&= -\ln\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

h) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx$

Neste exercício usaremos a integração por partes duas vezes. Fique atento que produtos de potencias de e e funções trigonométricas quase sempre requerem que se faça este processo. Vamos fazer

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(2x) \Rightarrow f'(x) - 2sen(2x) \\
g'(x) &= e^{-x} \Rightarrow g(x) = -e^{-x}
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx \\
&= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - \int_0^\infty -e^{-x}\left(-sen(2x)\right)2dx \\
&= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\int_0^\infty e^{-x} sen(2x)dx
\end{aligned}$$

Aqui usaremos novamente a integração por partes. Para tanto, chame

$$f(x) = sen(2x) \text{ e } g'(x) = e^{-x}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx &= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\int_0^\infty e^{-x} sen(2x)dx \\
&= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\left[-e^{-x} sen(2x) - \int_0^\infty -e^{-x}\cos(2x)2dx\right] \\
&= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\left[-e^{-x} sen(2x) + 2\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x)dx\right] \\
&= -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x} sen(2x) - 4\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x)dx \\
&\int senx + 3dx
\end{aligned}$$

Observe é igual a quatro vezes a integral original. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx &= -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x} sen(2x) - 4\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x)dx \\
\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x dx + 4\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x)dx &= -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x} sen(2x) \\
5\int_0^\infty e^{-x}\cos(2x)dx &= -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x} sen(2x) \\
5\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\cos(2x)dx &= \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x} sen\,(2x)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} -e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}\sin(2t) - \\
&- \left(-e^{-0}\cdot\cos(0) + 2e^{-x}\sin(0)\right) \\
&= 0+0+1+0 \\
5\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\cos(2x)dx &= 1 \\
\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\cos(2x)dx &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Segue, então, que a integral converge para $\frac{1}{5}$.

2)a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3(1+e^x)}$

Neste exercício usaremos o Critério da Comparação.

Observe que para $1 \leq x$, temos que:

$$\frac{1}{x^3(1+e^x)} < \frac{1}{x^3}$$

Então, precisamos verificar se $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ converge.

De fato:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^3} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^t \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} t^{-2} - 1^{-2}\Big|_1^t \\
&= -\frac{1}{2}(0-1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3(1+e^x)}$ converge.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}e^x}$$

Observe que para $0 < x \leq 1$, temos$\int \log x dx = x(\ln x - 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Então precisamos verificar se $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.

De fato:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{t\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 \\
&= 2\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{t}\right) \\
&= 2(1-0) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$, converge.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x}dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}dx$$

Como $q(x)$ tem fatores lineares distintos, então a função racional corresponde a uma soma de duas frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}.$$

Para determinar A_1 e A_2, vamos multiplicar ambos os lados da equação acima por $x\left(x-1\right)$, obtemos assim

$$\begin{aligned} 1 &= A_1\left(x-1\right) + A_2 x \\ &= x\left(A_1 + A_2\right) - A_1 \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \quad -A_1 = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema temos que:

$$A_1 = -1$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow -1 = -A_2 \Rightarrow 1 = A_2$$

Portanto,

$$A_2 = -1.$$

Logo, a decomposição em frações parciais é:

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

Se uma das integrais do lado direito da equação acima divergir, segue que $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x}dx$

diverge. Observe que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{x}dx \\
&= \lim_{t\to 0} \ln|x|\big|_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0} [\ln 1 - \ln t] \\
&= [0-\infty] \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $\lim_{t\to 0}\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx = -\infty$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen^2x}{x^2+1}dx$

Observe que para qualquer $x \in [0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
-1 &\leq senx \leq 1 \\
0 &\leq sen^2x \leq 1 \\
0 &\leq \frac{sen^2x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \\
\int_0^\infty \frac{sen^2x}{x^2+1}dx &\leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx
\end{aligned}$$

Vamos analisar $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ quanto à convergência.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \arctan(x)\big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} [\arctan(t) - \arctan 0] \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ converge, segue, portanto, que $\int_0^\infty \frac{sen^2x}{x^2+1}dx$ converge.

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}dx$

Observe que, para $x \in [0,\infty)$ temos:

$$\frac{1}{\sqrt{x^5+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}dx \leq \int_1^\infty x^{-\frac{5}{2}}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-\frac{5}{2}}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_1^t \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{t\to\infty} x^{-\frac{3}{2}}\Big|_0^t \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}\left[t^{-\frac{3}{2}} - 1^{-\frac{3}{2}}\right] \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}[0-1] \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Segue, então, pelo Critério da Comparação que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx$

Observe que, para $x \in (0,1]$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1}}{x} &\leq \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} \\
\frac{1}{x} &\leq \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow \int_t^1 \frac{1}{x}dx \leq \int_t^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx.
\end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{x}dx \\
&= \lim_{t\to 0} \ln|x|\Big|_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0} \ln|1| - \ln|t| \\
&= \lim_{t\to\infty} [0-(-\infty)] \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Segue, então, pelo Critério da Comparação que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}dx$ diverge.

3)

Pela definição dada no exercício a transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Então em cada um dos casos a seguir deveremos determinar para quais valores de s a integral envolvida converge.

a) $f(t) = 1$

A transformada de Laplace para esta função fica:

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt &= \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st} dt \\ &= \lim_{p \to \infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^p \\ &= -\frac{1}{s} \left[e^{-sp} - e^0 \right] \\ &= \frac{1}{s}, s > 0 \end{aligned}$$

b) $f(t) = \cos(t)$

A transformada de Laplace para esta função fica:

$$F(s) = \int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-st} dt$$

Aqui vamos usar o método da integração por partes duas vezes. Como já vimos em outros exercícios essa é uma estratégia bastante utlizada quando o integrando envolve produtos de funções trigonométricas e potências de e.

Para fazermos a integração por partes chame

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(t) \Rightarrow f'(t) = -sen(t) \\ g'(x) &= e^{-st} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned}$$

Temos, então, que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-st} dt &= \cos(t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int_0^\infty -sen(t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= -\cos(t) \cdot \frac{e^{-st}}{s} - \int_0^\infty sen(t) \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= -\frac{1}{s} \left[\cos(t) \cdot e^{-st} + \int_0^\infty sen(t) \cdot e^{-st} dt \right] \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Vamos, agora fazer a segunda integração por partes na integral que aparece do lado direito da última igualdade acima.

Chame

$$\begin{aligned} f(t) &= sen(t) \Rightarrow f'(t) = \cos(t) \\ g'(t) &= e^{-st} \Rightarrow g(t) = \frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned}$$

Então, a equação (4.1) fica:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= -\frac{1}{s}\left[\cos(t)\cdot e^{-st} + \int_0^\infty sen(t)\cdot e^{-st}dt\right] \\ &= -\frac{1}{s}\left[\cos(t)\cdot e^{-st} + \left(sen(t)\cdot\frac{e^{-st}}{-s} - \int_0^\infty \cos(t)\cdot\frac{e^{-st}}{-s}dt\right)\right] \\ &= -\frac{1}{s}\left[\cos(t)\cdot e^{-st} + \left(sen(t)\cdot\frac{e^{-st}}{-s} + \int_0^\infty \cos(t)\cdot\frac{e^{-st}}{s}dt\right)\right] \\ \int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= -\frac{\cos(t)\cdot e^{-st}}{s} + \frac{sen(t)\cdot e^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-st}dt \\ \frac{s^2+1}{s}\int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= -\frac{\cos(t)}{e^{st}} + \frac{sen(t)}{s\cdot e^{st}} \end{aligned}$$

Observe que

$$\int_0^\infty \cos(t)\cdot e^{-st}dt = \lim_{p\to\infty}\int_0^p \cos(t)\cdot e^{-st}dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{s^2+1}{s}\lim_{p\to\infty}\int_0^p \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{sen(t)}{s\cdot e^{st}} - \frac{\cos(t)}{e^{st}}\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\left.\frac{sen(t)}{s\cdot e^{st}}\right|_0^p - \left.\frac{\cos(t)}{e^{st}}\right|_0^p \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{sen(p)}{s\cdot e^{sp}} - \frac{sen(0)}{s\cdot e^{s0}}\right] - \left[\frac{\cos(p)}{e^{sp}} - \frac{\cos(0)}{e^{s0}}\right] \\ &= [0-0]-[0-1] \\ \frac{s^2+1}{s}\lim_{p\to\infty}\int_0^p \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= 1 \\ \lim_{p\to\infty}\int_0^p \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= \frac{1}{\frac{s^2+1}{s}} \\ \lim_{p\to\infty}\int_0^p \cos(t)\cdot e^{-st}dt &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

c) $f(t) = e^{at}$

A transformada de Laplace fica

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt
\end{aligned}
$$

Como temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{(a-s)t} dt &= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{(a-s)t} dt \\
&= \lim_{p\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^p \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[e^{(a-s)p} - e^0 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[e^{ap} e^{-sp} - e^0 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[\frac{e^{ap}}{e^{sp}} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[\frac{1}{e^{sp}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{e^{ap}}} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[\frac{1}{e^{sp}} \cdot \frac{1}{e^{-ap}} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} \lim_{p\to\infty} \left[\frac{1}{e^{(s-a)p}} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{a-s} [-1] \\
&= \frac{1}{s-a}, \text{ onde } s > a
\end{aligned}
$$

d) $f(t) = t$

A transformada de Laplace fica:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt$$

Aqui usaremos a integração por partes e para isso chamaremos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= t \Rightarrow f'(x) = 1 \\
g'(x) &= e^{-st} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-st}}{-s}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt &= t\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt - t\left(\frac{e^{-st}}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\left[\int_0^\infty e^{-st} dt - t\left(e^{-st}\right)\right] \\
&= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{s}\left[\int_0^p e^{-st} dt - t\left(e^{-st}\right)\right] \\
&= \frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^p - \left.\frac{t}{e^{st}}\right|_0^p\right] \\
&= \frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{-se^{sp}} - \frac{1}{se^0} - \left(\frac{p}{e^{sp}} - 0\right)\right] \\
&= \frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{-se^{sp}} - \frac{1}{se^0} - \left(\frac{1}{e^{sp}s} - 0\right)\right] \\
&= \frac{1}{s}\lim_{p\to\infty}\left[0 - \frac{1}{-s} - (0-0)\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{1}{s^2}, \text{ onde } s \neq 0.
\end{aligned}
$$

1.10 lista de fixação - Capítulo 1, página 55

1)a) Como os limites de integração constituem uma intervalo degenerado, conclui-se imediatamente que a integral é nula.

2) Sendo $f(x)$ contínua, o Teorema 1.9 da página 19 nos permite escrever

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-1} f(x)dx &= \int_{-1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-1} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-1} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} sen\frac{1}{x}, se\ x \neq 0 \\ 0, se\ x = 0 \end{cases}$$

Segundo o **Teorema 1.4** da página 10 esta função é integrável pois tem um número finito de pontos de descontinuidade. De fato, a função tem somente um único ponto de descontinuidade.

4) Sabemos que:
$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$. Assim,
$8 = 3 + \int_2^3 f(x)dx - 1$. Finalmente,
$\int_2^3 f(x)dx = 6$.

5) Se

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

então o item d) do Teorema 1.8 (página 17) garante que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Sendo a e b números reais e $f(x)$ contínua em $[a, b]$, as integrais acima são também números reais. Segue pela propriedade que garante a implicação

$$-a \leq b \leq a \Rightarrow |b| \leq a,$$

par quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

6) Devemos encotrar uma função tal que satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Com a primeira informação podemos determinar a primitiva de $f\prime$ que na verdade é a função f procurada.

Observe que:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int f'(x)dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx \\ f(x) &= \ln|x| + \left(-\frac{1}{x}\right) + c \end{aligned}$$

Note que utilizando somente a primeira informação não podemos determinar exatamente qual é a função procurada, para isso é necessário que se use o segundo dado a respeito de f, dele segue que:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln|1| + \left(-\frac{1}{1}\right) + c \\ 1 &= 0 - 1 + c \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Segue então que a função que satisfaz às condições é

$$f(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + 2.$$

7)a) Tarefa.

8) Seja $g(x) = xf(x^2)$. Note que

$$g(-x) = -xf((-x)^2) = -xf(x^2) = -g(x).$$

Portanto a função $g(x)$ é ímpar, e como o intervalo $[-1, 1]$ é simétrico em relação ao eixo y, concluimos que

$$\int_{-1}^{1} xf(x^2)dx = 0.$$

9) Devemos mostrar que se $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\int_{0}^{\pi} g(senx) \cdot \cos x dx = 0$$

Vamos fazer uma mudança de variável. Seja

$$senx = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

Agora, calculando os novos extremos de integração resulta que:

$$\begin{aligned} \text{para } x &= 0 \Rightarrow u = 0 \\ \text{para } x &= \pi \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{0}^{0} g(u)du = 0$$

10) $G(x) = \displaystyle\int_{2}^{x^3} \cos t dt$. Note que:

$G'(x) = \frac{d}{dx} \displaystyle\int_{2}^{x^3} \cos t dt.$

Tome $u = x^3$.

Verifique que: $\frac{du}{dx} = 3x^2$.

Temos que,

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \frac{d}{dx}\int_2^{x^3} \cos t dt \\
&= (\frac{d}{du}\int_2^{x^3} \cos t dt)\frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\int_2^{u} \cos t dt 3x^2 \\
&= 3x^2 \cos u \\
&= 3x^2 \cos x^3.
\end{aligned}$$

11)a)

$$\begin{aligned}
\left[2\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}\right) + c\right]' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\frac{3+x-2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-2}}\left(1 - \frac{3}{x+1}\right) \\
&= \frac{x-2}{\sqrt{x-2}(x+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2a} ln\left|\frac{x+a}{x_a}\right| + c\right]' &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{x-a}{x+a} \cdot \left[\frac{(x-a)-(x+a)}{(x-a)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2a} \cdot \frac{x-a}{x+a} \cdot \left[\frac{-2a}{(x-a)^2}\right] \\
&= \frac{-1}{(x+a)(x-a)} \\
&= \frac{-1}{a^2+x^2} \\
&= \frac{1}{-a^2-x^2}.
\end{aligned}$$

c) Nosso objetivo é calcular a seguinte derivada:

$$\left[\frac{1}{6}x\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{3}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|+c\right]'.$$

Mas, para isso, vamos calcular separadamente

$$\begin{aligned}[x\sqrt{x^2+4}]' &= \sqrt{x^2+4}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\\ &= \sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\\ &= \frac{2x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left[ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|\right]' &= \frac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{6}x\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{3}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|+c\right]' &= \frac{1}{6}\cdot\frac{2x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{2x^2+4}{2}-2\right)\\ &= \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}.\end{aligned}$$

12)a)

$$\int\left(x^2+senx\right)dx=\frac{x^3}{3}-\cos x+c$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 3\sqrt[3]{x} + 2}{x} dx &= \int \left(x^3 - \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{x} \right) dx \\
&= \int x^3 dx - 3 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^4}{4} - 3 \cdot 3x^{\frac{1}{3}} + 2 \ln |x| + c \\
&= \frac{x^4}{4} - 9x^{\frac{1}{3}} + 2 \ln |x| + c \\
&= \frac{x^4}{4} - 9\sqrt[3]{x} + 2 \ln |x| + c
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
&= \int dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\
&= \int dx + \int x^{-2} dx \\
&= x - x^{-1} + c \\
&= x - \frac{1}{x} + c
\end{aligned}$$

d)

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

e) $\int \frac{2 - senx}{2x + \cos x} dx$

Tomando-se

$$u = 2x + \cos x \Rightarrow du = (2 - senx)dx$$

Fazendo a substituição tem-se:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du.$$

E, daí:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c.$$

Voltando à variavel original resulta que:

$$\ln u + c = \ln(2x + \cos x) + c$$

f) $\displaystyle\int \tan(x)dx$

Observe que

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx$$

Aqui usaremos uma mudança de variável chamando

$$\cos(x) = u \Rightarrow -sen(x)dx = du.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx &= \int \frac{-du}{u}\\ &= -\int \frac{du}{u}\\ &= -\ln|u| + c\end{aligned}$$

Voltando à variável original, resulta que:

$$\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{\cos(x)}}{\text{cossec}(x)}dx$

Note que

$$\begin{aligned} dx &= \int \frac{e^{\cos(x)}}{\frac{1}{sen(x)}}dx\\ &= \int e^{\cos(x)} \cdot sen(x)dx\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\cos(x) = u \Rightarrow -sen(x)dx = du \Rightarrow sen(x)dx = -du$$

Então

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\cos(x)}}{\text{cossec}(x)} &= \int e^{u}\,(-du) \\ &= -\int e^{u}du \\ &= -e^{u}+c\end{aligned}$$

E, voltando à variável original, resulta que

$$\int \frac{e^{\cos(x)}}{\text{cossec}(x)} = -e^{\cos(x)}+c$$

h) $\int \cos(x)sen(sen(x))dx$

Vamos utilizar a mudança de variável

$$sen(x)=u \Rightarrow \cos(x)dx=du$$

Então

$$\begin{aligned}\int \cos(x)sen(sen(x))dx &= \int sen(x)dx \\ &= -\cos(u)+c\end{aligned}$$

E, voltando à variável original, resulta que

$$\int \cos(x)sen(sen(x))dx = -\cos(sen(x))+c$$

i) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

Vamos utilizar a mudança de variável

$$\begin{aligned}x^2-2x+5=u \Rightarrow (2x-2)\,dx &= du \\ 2\,(x-1)\,dx &= du \\ (x-1)\,dx &= \frac{du}{2}\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx &= \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u|+c
\end{aligned}$$

E, voltando à variável original, resulta que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx &= \frac{1}{2}\ln|u|+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+c
\end{aligned}$$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-2x+5} &= \int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2} \\
&= \int \frac{\frac{1}{4}dx}{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{2^2}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}
\end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{2}=u \Rightarrow \frac{dx}{2} &= du \\
dx &= 2du
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \frac{2du}{(u)^2+1} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\arctan u + c.
\end{aligned}$$

Voltando à variável original resulta que

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c.$$

k) $\displaystyle\int \left(x + \sec^2(5x)\right) dx$

$$\int (x + \sec(5x))\, dx = \int x dx + \int \sec^2(5x)\, dx.$$

Vamos fazer uma mudança de variável na segunda integral do membro da diereita da igualdade acima. Chame

$$\begin{aligned} 5x = u \Rightarrow 5dx &= du \\ du &= \frac{du}{5}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int (x + \sec(5x))\, dx &= \int x dx + \int \sec^2(u) \frac{du}{5} \\ &= \int x dx + \frac{1}{5} \int \sec^2(u)\, du \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \tan(u) + c. \end{aligned}$$

Voltando à variável original segue que

$$\int (x + \sec(5x))\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \tan(5x) + c.$$

l) $\displaystyle\int \cos^2(x) dx$

Segundo a identidade (2) da página 61 podemos escrever

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx. \end{aligned}$$

Vamos fazer uma mundança de variável na segunda integral da última equação.

Chame

$$\begin{aligned} 2x = u \Rightarrow 2dx &= du \\ dx &= \frac{du}{2}. \end{aligned}$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)dx &= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\cos(u)}{2}\frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos(u)\, du \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(u) + c. \end{aligned}$$

Voltando à variável original, resulta:

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen(2x) + c.$$

m) $\int \log(x)dx$

Observe que pela propriedade da mudança de base de logaritmos podemos escrever

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \int \log(x)dx &= \int \frac{\ln(x)}{\ln 10}dx \\ &= \frac{1}{\ln 10}\int \ln(x)dx. \end{aligned}$$

Note que $1 = \ln e$. Portanto:

$$\begin{aligned} \int \log(x)dx &= \frac{\ln e}{\ln 10}\int \ln(x)dx \\ &= \frac{\ln e}{\ln 10}\left[\ln x - x\right] \end{aligned}$$

Agora, pela mesma propriedade de logaritmos utilizada anteriormente, temos:

$$\frac{\ln e}{\ln 10} = \log e$$

Então:

$$\int \log(x)dx = \log e\left[\ln x - x\right] + c.$$

Observação: Para fazer a primitivação de $\ln x$, revise o **item f) do exercício 1 da lista 1.9.1.**

n) $\displaystyle\int \frac{sen(2x)}{\cos(x)}dx$

Antes de calcular a integral perceba que

$$sen\,(2x) = sen(x+x)$$

e pela fórmula do seno da soma de ângulos resulta que:

$$\begin{aligned} sen\,(x+x) &= sen\,(x)\cos(x) + sen\,(x)\cos(x) \\ &= 2sen\,(x)\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Esta identidade é útil em muitos exercícios de Cálculo. Escreva também a idendtidade para $\cos(2x)$.

Agora substituindo a identidade acima no integrando resulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{sen(2x)}{\cos(x)}dx &= \int \frac{2sen\,(x)\cos(x)}{\cos(x)}dx \\ &= \int 2sen(x)dx \\ &= 2\int sen(x)dx \\ &= -2\cos(x) + c. \end{aligned}$$

o) $\displaystyle\int e^{2x}sen(3x)dx$

Aqui usaremos a técnica da integração por partes duas vezes. Para tanto, faremos

$$\begin{aligned} f(x) &= sen(3x) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(3x) \\ g'(x) &= e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{2x}}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int e^{2x} sen(3x)dx &= sen(3x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3\cos(3x)dx \\ &= \frac{1}{2} sen(3x) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 3\cos(3x)dx \\ &= \frac{1}{2} \left[sen(3x) \cdot e^{2x} - 3 \int e^{2x} \cdot \cos(3x)dx \right]. \end{aligned}$$

Agora, vamos integrar novamente por partes a integral que aparece na última igualdade. Para tanto, chamaremos

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(3x) \Rightarrow f'(x) = -3sen(3x) \\ g'(x) &= e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{2x}}{2}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} sen(3x)dx &= \frac{1}{2} \left\{ sen(3x) \cdot e^{2x} - 3 \left[\frac{e^{2x}}{2} \cos(3x) - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3sen(3x))\, dx \right] \right\} \\ &= \frac{sen(3x) \cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \cos(3x) - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3sen(3x))\, dx \right] \\ &= \frac{sen(3x) \cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \cos(3x) + \frac{3}{2} \int e^{2x} \cdot sen(3x)dx \right] \\ &= \frac{sen(3x) \cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cdot sen(3x)dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x} sen(3x)dx + \frac{9}{4}\int e^{2x}\cdot sen(3x)dx &= \frac{sen(3x)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)\\
\frac{13}{4}\int e^{2x}\cdot sen(3x)dx &= \frac{sen(3x)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)\\
\int e^{2x}\cdot sen(3x)dx &= \left[\frac{sen(3x)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)\right]\frac{4}{13}\\
&= \left[2sen(3x)\cdot e^{2x} - 3e^{2x}\cos(3x)\right]\frac{1}{13}\\
&= \left[2sen(3x) - 3\cos(3x)\right]\frac{e^{2x}}{13} + c.
\end{aligned}
$$

p) $\int x^2\cos(x)dx$

Aqui vamos usar o método da integração por partes, chamando, para isso

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x\\
g'(x) &= \cos(x) \Rightarrow g(x) = sen(x)
\end{aligned}
$$

Então fica

$$
\begin{aligned}
\int x^2\cos(x)dx &= x^2 sen(x) - \int 2x sen(x)dx\\
&= x^2 sen(x) - 2\int x sen(x)dx.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes novamente e fazendo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \Rightarrow f'(x) = 1\\
g'(x) &= sen(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)
\end{aligned}
$$

resulta que

$$
\begin{aligned}
\int x^2\cos(x)dx &= x^2 sen(x) - 2\left[x\left(-\cos(x)\right) - \int -\cos(x)dx\right]\\
&= x^2 sen(x) - 2\left[-x\cos(x) + \int \cos(x)dx\right]\\
&= x^2 sen(x) - 2\left[-x\cos(x) + sen(x)\right]\\
&= x^2 sen(x) + 2x\cos(x) - 2sen(x) + c.
\end{aligned}
$$

q) $\int x^2 e^x dx$

Vamos integrar por partes fazendo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ g'(x) &= e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \end{aligned}$$

Usando mais uma vez o método da intgração por partes, vamos chamar

$$\begin{aligned} f(x) &= x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) &= e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{aligned}$$

então ficamos com

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \\ &= e^x\left[x^2 - 2x + 2\right] + c \end{aligned}$$

r) $\int x^2 \ln(x) dx$

Fazendo

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) &= x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

e integrando por partes, resulta:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln(x) dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\
&= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \\
&= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{9} + c.
\end{aligned}$$

13)

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)g''(x)dx &= f(x)g'(x)|_0^a - \int_0^a f'(x)g'(x)dx \\
&= f(x)g'(x)|_0^a - \left(f'(x)g(x)|_0^a - \int_0^a f''(x)g(x)dx \right) \\
&= f(x)g'(x)|_0^a - f'(x)g(x)|_0^a + \int_0^a f''(x)g(x)dx \\
&= f(a)g'(a) - f(0)g'(0) - f'(a)g(a) + f'(0)g(0) + \int_0^a f''(x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

Como f(0)=g(0), segue que, $f'(0)g(0) - f(0)g'(0) = 0$. E assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)g''(x)dx &= f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx + f'(0)g(0) - f(0)g'(0) \\
&= f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

14)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\
&= \int_{-1}^1 x^2 + 1dx + \int_1^2 2^x dx \\
&= \frac{x^3}{3} + x\bigg|_{-1}^1 + \frac{2^x}{ln(2)}\bigg|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{2^2}{ln(2)} - \frac{2}{ln(2)} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{2}{ln(2)}.
\end{aligned}$$

15)a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^3(x)}{x}dx$

Para calcular esta integral vamos usar a mudança de variável

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx.$$

Como a integral em questão é definida, ao fazer a mudança de variável, precisamos calcular os novos extremos de integração. Observe que

$$\begin{aligned} \text{se } x &= 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0 \\ \text{se } x &= 2 \Rightarrow u = \ln 2 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln^3(x)}{x}dx &= \int_0^{\ln 2} u^3 dx \\ &= \left.\frac{u^4}{4}\right|_0^{\ln 2} \\ &= \frac{\ln^4 2}{4} - \frac{0}{4} \\ &= \frac{\ln^4 2}{4}. \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dx = \arctan(t)|_0^1 &= \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c)

d) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx &= \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \right] \\
&= \frac{2}{3}\left[\left(1^{\frac{3}{2}} - 0\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \right] \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) sen^5(x) dx$

Fazendo a mudança de variável

$$sen(x) = u \Rightarrow \cos(x)dx = du.$$

Os novos extremos de integração são:

$$\begin{aligned}
\text{se } x &= \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
\text{se } x &= 0 \Rightarrow u = sen 0 = 0
\end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)sen^5(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} u^5 du \\
&= \left.\frac{u^6}{6}\right|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 0^6\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{64}\right] \\
&= \frac{1}{384}.
\end{aligned}
$$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left|x^2 - 1\right| dx$

Neste caso podemos considerar a integral como a área sob o gráfico da função $|x^2 - 1|$. Então queremos calcular a seguinte área:

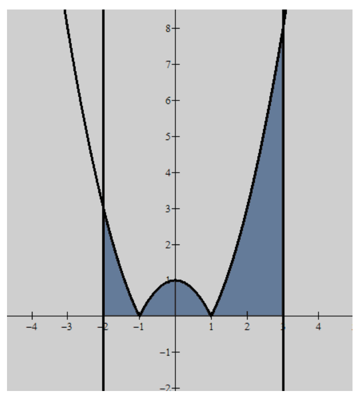

Figura 1.10: Exercício-15)f)

Neste caso a integral pode ser calculada do seguinte modo:

$$\int_{-2}^{3} \left|x^2 - 1\right| dx = \int_{-2}^{3} x^2 - 1dx - \int_{-1}^{1} x^2 - 1dx + \int_{1}^{3} x^2 - 1dx.$$

O sinal negativo antes da segunda integral do membro da direita da igualdade justifica-se pela definição de módulo, pois a integral em questão é negativa. Da equação acima segue que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{3} \left|x^2-1\right| dx = \int_{-2}^{-1} x^2-1dx - \int_{-1}^{1} x^2-1dx + \int_{1}^{3} x^2-1dx \\
= \quad &\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{3} \\
= \quad &\left\{\left[\left[-\frac{1}{3}+1\right]-\left[-\frac{8}{3}+2\right]\right]-\left[\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[-\frac{1}{3}+1\right]\right]+\left[\left[\frac{27}{3}-3\right]-\left[\frac{1}{3}-1\right]\right]\right\} \\
= \quad &\left\{\left[\frac{2}{3}-\left[-\frac{2}{3}\right]\right]-\left[-\frac{2}{3}-\left[\frac{2}{3}\right]\right]+\left[6-\left[-\frac{2}{3}\right]\right]\right\} \\
= \quad &\left\{\frac{4}{3}-\left[-\frac{4}{3}\right]+\frac{20}{3}\right\} \\
= \quad &\frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

g) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen}(x)dx$

Para determinarmos a primitiva precisamos usar a integração por partes, mas para isso precisamos ver o integrando do seguinte modo:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} arcsen(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot arcsen(x)dx$$

Agora, chame

$$
\begin{aligned}
f(x) &= arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
g'(x) &= 1 \Rightarrow g(x) = x.
\end{aligned}
$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} arcsen(x)dx &= x \cdot arcsen(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x \cdot arcsen(x)|_0^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot arcsen\,(0) + \left[\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{1-(0)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} - 0 + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\
&= \frac{6\pi + \sqrt{3}}{12} - 1
\end{aligned}$$

h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (sen\,(x) + |cos\,(x)|)\,dx$

Observe que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (sen\,(x) + |cos\,(x)|)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen\,(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |cos\,(x)|\,dx$$

Como a função seno é par, e está sendo integrada sobre um intervalo simétrico, resulta que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\,(x)\,dx = 0,$$

e, ainda, a função cosseno é par e está sendo integrada sobre um intervalo simétrico

$$\int_{-\pi}^{\pi} |cos\,(x)|\,dx = 2\int_{0}^{\pi} |cos\,(x)|\,dx.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (sen\,(x) + |cos\,(x)|)\,dx &= 2\int_0^{\pi} |cos\,(x)|\,dx \\
&= 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} |cos\,(x)|\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |cos\,(x)|\,dx\right] \\
&= 2\left[sen\,(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - sen\,(x)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] \\
&= 2\left[sen\frac{\pi}{2} - sen0 - \left(sen\pi - sen\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\,[1 - 0 - (0 - 1)] \\
&= 4
\end{aligned}$$

16)a) Fazendo $I = \displaystyle\int cos^n(x)dx$ temos

$$\begin{aligned}
I = \int cos^n(x)dx = \int cos(x)cos^{n-1}(x)dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) - \int sen(x)(n-1)cos^{n-2}(x)(-sen(x))dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) + \int (n-1)sen^2(x)cos^{n-2}(x)dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) + (n-1)\int (1 - cos^2(x))cos^{n-2}(x)dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2} - cos^n(x)dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2}dx - (n-1)\int cos^n(x)dx \\
&= sen(x)cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2}dx - (n-1)I.
\end{aligned}$$

Isolando as parcelas dependentes de I no lado esquerdo da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned}
I + (n-1)I = n \cdot I = sen(x)cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2}dx \\
\Rightarrow I = \frac{1}{n}[sen(x)cos^{n-1}(x)] + \frac{(n-1)}{n}\int cos^{n-2}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int cos^n x = \frac{1}{n}[sen(x)cos^{n-1}(x)] + \frac{(n-1)}{n}\int cos^{n-2}dx.$$

b)

$$\begin{aligned}\int ln^n(x)dx &= \int 1 \cdot ln^n(x)dx \\ &= x \cot ln^n(x) - \int x \cdot n \cdot ln^{n-1}(x)\frac{1}{x}dx \\ &= x \cdot ln^n(x) - n\int ln^{n-1}(x)dx.\end{aligned}$$

17) As curvas se interceptam em $x = 0$ e em $x = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 x^3dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}ua.\end{aligned}$$

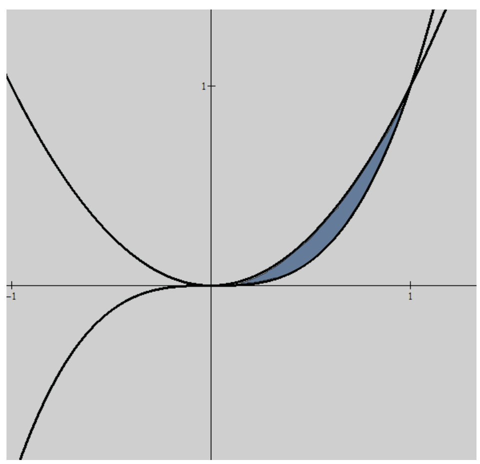

Figura 1.11: Exercício-17)

18)$y = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma, obtemos:

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 1$$

Observe que as raízes da função dada são -2, -1 e 1, mas que no intervalo $[-1, 1]$ a integral é negativa. Por isso, ao calcular a integral neste intervalo deveremos inverter o sinal.

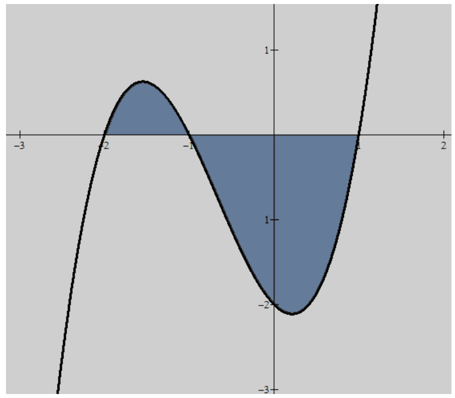

Figura 1.12: Exercício-18)

Então, calculando a integral em questão fica:

$$\int_{-2}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx=\int_{-2}^{-1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx$$

De onde temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx &= \left(\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}\\
&= \left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+2\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)\right)\\
&= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-4+\frac{16}{3}+2-4\\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx &= \left(\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{1}\\
&= \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\\
&= \frac{4}{3}-4\\
&= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-2}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx=\int_{-2}^{-1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx &= \int_{-2}^{-1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx - \int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)(x+2)\,dx \\
&= \frac{5}{12} - \left(-\frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

19) $x = y + 1 \quad x = \dfrac{y^2}{2} - 3$

Igualando as equações concluimos que

$$y + 1 = \frac{y^2}{2} - 3 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Logo, os gráficos têm pontos comun em $y' = 4$ e $y'' = -2$. Segue-se que

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{4}(y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right) dy &= \int_{-2}^{4}(y+1) - \frac{y^2}{2} + 3dy \\
&= \int_{-2}^{4} -\frac{y^2}{2} + y + 4dy \\
&= \int_{-2}^{4} -\frac{y^2}{2}dy + \int_{-2}^{4} ydy + 4\int_{-2}^{4} dy \\
&= -\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\bigg|_{-2}^{4} + \frac{y^2}{2}\bigg|_{-2}^{4} + 4y|_{-2}^{4} = 18
\end{aligned}
$$

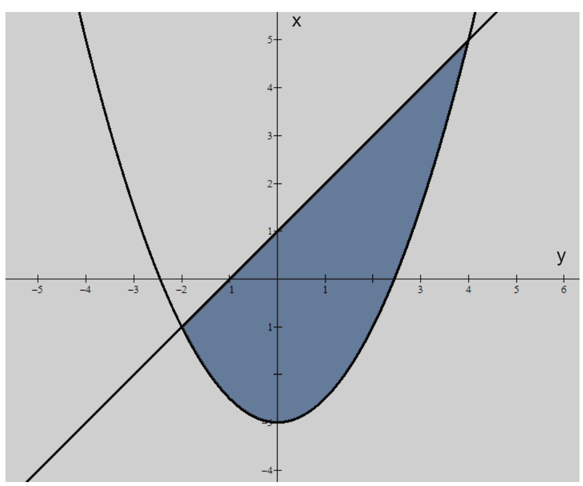

Figura 1.13: Exercício-19)

20)a) As retas $y = x + 6$ e $y = -x$ se interceptam em $x = -3$ e a reta $y = x + 6$ e a curva $y = x^3$ se interceptam em $x = 2$. Sendo assim, dividimos a área total em duas regiões I e II como mostra a figura para escrever

$$A = I + II = \left[\int_{-3}^{0} x + 6dx - \int_{-3}^{0} -xdx\right] + \left[\int_{0}^{2} x + 6dx - \int_{0}^{2} x^3dx\right]$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x + \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 19ua.$$

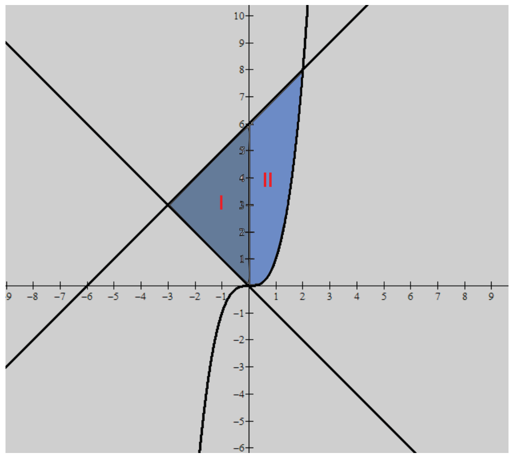

Figura 1.14: Exercício-20)a)

b)

$$A = \int_{-1}^{1} e^y dy - \int_{-1}^{1} y^2 - 2dy$$
$$= \left[\frac{e^y}{ln(e)} - \frac{y^3}{3} + 2y\right]_{-1}^{1}$$
$$= e^1 - e^{-1} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3} + 2$$
$$= e - e^{-1} + \frac{10}{3}ua.$$

21) Observe que a função $\sec(x) \geq 1$, para qualquer valor de seu domínio e a função $f(x) = x$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, é menor que a função $\sec(x)$. A área em questão é a seguinte:

A área da figura é dada por:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

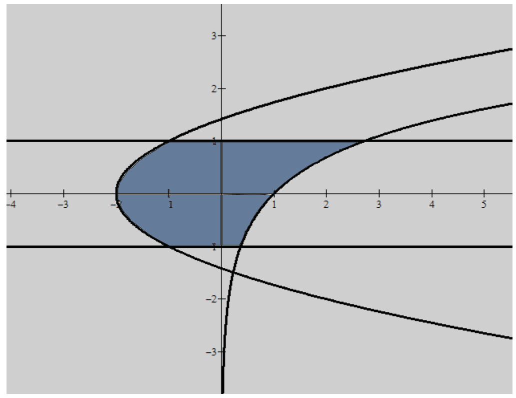

Figura 1.15: Exercício-20)b))

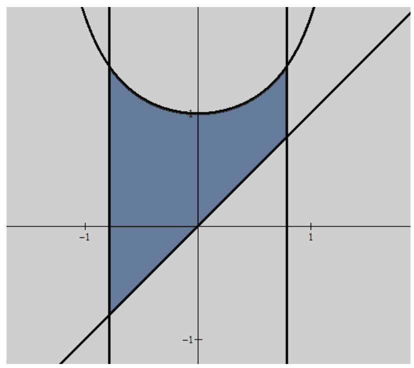

Figura 1.16: Exercício-21)

Pelo Exercício 3 da lista1.7.2, a primitiva da função secante é:

$$\ln|\sec(x)+\tan(x)|.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec(x)dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}xdx &= \ln|\sec(x)+\tan(x)|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\\
&- \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]\\
&= \ln\left|\frac{\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}}{\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right|\\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|ua.
\end{aligned}$$

22)a) Escrevendo $f(x) = x$ e $g'(x) = sen(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xsen(x)dx &= \lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t xsen(x)dx\right]\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-xcos(x)|_0^t + \int_0^t cos(x)dx\right]\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-xcos(x) + sen(x)|_0^t\right]\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-tcos(t) + sen(t)\right].\end{aligned}$$

Mas este limite não existe. De fato, para $t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \cdots$, temos

$$\lim_{t\to\infty}\left[-tcos(t) + sen(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[-tcos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + sen(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right] = 1$$

e para $t = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \cdots$, temos

$$\lim_{t\to\infty}\left[-tcos(t) + sen(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[-tcos(3\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + sen(3\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right] = -1,$$

ou seja, existem subsequências que convergem para limites diferentes.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

Observe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx. \qquad (1.6)$$

Para verificarmos se $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ converge, temos que verificar se cada membro do lado direito da igualdade em (1.6) converge.

Temos que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx.$$

Para calcular $\int_{-t}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ reescreveremos o integrando da seguinte forma:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0} \frac{1}{(x+1)^2 + 1}dx.$$

Então, calculando a integral obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty}\arctan(x+1)\Big|_{-t}^{0}\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan(0+1)-\arctan(-t+1)\right]\\
&= \lim_{t\to\infty}\arctan(1)-\lim_{t\to\infty}\arctan(1-t)\\
&= \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Portanto $\int_{-t}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ converge para $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$.

Agora, de modo análogo ao feito anteriormente, podemos verificar queque verificar que $\int_0^t \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ converge. Observe que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty}\arctan(x+1)\Big|_{0}^{t}\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan(t+1)-\arctan(0+1)\right]\\
&= \lim_{t\to\infty}\arctan(t+1)-\lim_{t\to\infty}\arctan(1)\\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx.\\
&= \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}+\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\\
&= \pi.
\end{aligned}$$

c) Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x}dx &= \int_0^2 \frac{1}{x(x-2)}dx \\
&= \int_0^2 -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x-4}dx \\
&= \int_0^1 \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2x-4}dx + \int_1^2 \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2x-4}dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left[\int_s^1 \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2}dx\right] + \frac{1}{2}\lim_{t\to 2}\left[\int_1^t \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2}dx\right],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x}dx &= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left[-ln|x| + ln|x-2|\big|_s^1\right] + \frac{1}{2}\lim_{t\to 2}\left[-ln|x| + ln|x-2|\big|_1^t\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}[(-ln|1| + ln|-1|) - (-ln|s| + ln|s-2|)] + \\
&+ \frac{1}{2}\lim_{t\to 2}[(-ln|t| + ln|t-2|) - (-ln|1| + ln|-1|)] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}(ln|s| - ln|s-2|) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 2}(-ln|t| + ln|t-2|) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left(ln\left|\frac{s}{s-2}\right|\right) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 2}\left(ln\left|\frac{t-2}{t}\right|\right) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Portanto a integral diverge.

d) $\int_3^\infty \frac{1}{x\ln^4(x)}dx$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$\ln(x) = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$

O novo intervalo de integração fica:

$$\begin{aligned}
x &= 3 \Rightarrow u = \ln 3 \\
&\text{e} \\
x &\to \infty \Rightarrow \ln(x) \to \infty \Rightarrow u \to \infty
\end{aligned}$$

Então, agora temos que calcular a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{1}{u^4} du &= \lim_{t\to\infty} \int_{\ln(3)}^{t} \frac{1}{u^4} du \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\ln(3)}^{t} u^{-4} du \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{3} u^{-3} \Big|_{\ln 3}^{t} \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left(t^{-3} - \ln^{-3} 3\right) \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{\ln^3 3}\right) \\
&= -\frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{\ln^3 3}\right) \\
&= \frac{1}{3\ln^3 3}
\end{aligned}$$

Portanto $\int_3^{\infty} \frac{1}{x\ln^4(x)} dx$ converge para $\frac{1}{3\ln^3 3}$.

23)a) Sabemos que $0 \leq |sen(x)| \leq 1$ para todo $x \geq 0$. Portanto podemos afirmar que

$$0 \leq \frac{|sen(x)|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3},\ \forall x \geq 1.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^3} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2} x^{-2} \Big|_1^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto a integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|sen(x)|}{x^3} dx$$

é convergente.

b) É imediato ver que

$$0 \leq \frac{1}{x^2+10} \leq \frac{1}{x^2+1},\ \forall x.$$

Então, para usar o método de comparação, vamos avaliar a integral

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{s\to+\infty}\int_{0}^{s} \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} arctg(x)|_t^0 + \lim_{s\to+\infty} arctg(x)|_0^s \\
&= \lim_{t\to-\infty} arctg(0) - arctg(t) + \lim_{s\to+\infty} arctg(s) - arctg(0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Portanto, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+10}dx$$

é convergente.

c) Primeiramente observe que o integrando pode ser escrito como

$$\frac{1+e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} > 0, \quad \forall x \geq 1.$$

Mas,

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}, \quad \forall x \geq 1$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx &= ln(x)|_1^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} ln(t)|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} ln(t) - ln(1) = +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, a integral em questão é divergente.

24) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xdx &= \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{0} xdx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{\infty} xdx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{0} xdx + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} xdx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-t}^{0} + \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{t} \\
&= \left[0 - \left(-\frac{t}{2}\right)^2\right] + \left[\left(-\frac{t}{2}\right)^2 - 0\right] \\
&= -\infty + \infty.
\end{aligned}
$$

Como a integral não existe como um número real, segue que a integral é divergente.