Capítulo 1

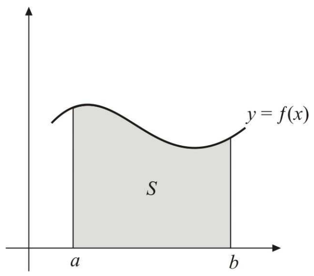
INTEGRAIS

Neste capítulo estudaremos o conceito de integral e suas propriedades. A integral tem muitas aplicações na geometria (cálculo de área de regiões planas, comprimento de arco e cálculo de volume) e na física (cálculo de trabalho, massa e momento de inércia). Um dos resultados mais importantes deste capítulo é o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona a integral com a derivada, e simplifica consideravelmente a solução de muitos problemas.

1.1 Introdução

A principal motivação para estudar o conceito de integral está em encontrar a área de uma região plana qualquer. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

Problema 1. *Considere uma função* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *limitada. Admitimos por simplicidade,* $f(x)\geq 0$ *para todo* $x\in[a,b]$. *Queremos encontrar a área da região plana* S *que está limitada pelo gráfico de* f *, pelas retas* $x=a$ *e* $x=b$ *, e o eixo* x .



$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, 0\leq y\leq f(x(x)\ e\ a\leq x\leq b\}$$

Figura 1.1

O problema de cálculo de área de uma região plana é antigo. Os gregos há aproximadamente 2.500 anos, já sabiam como encontrar a área de qualquer polígono. A idéia da técnica empregada era dividir o polígono em triângulos e em seguida somar as áreas obtidas. No caso em que a região plana era qualquer, o método utilizado era o da exaustão, que consiste em inscrever ou circunscrever a figura com polígonos cujas áreas eram conhecidas e melhorar a aproximação da área desejada, aumentando o número de polígonos inscritos ou circunscritos. As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram o método aplicado pelos gregos.

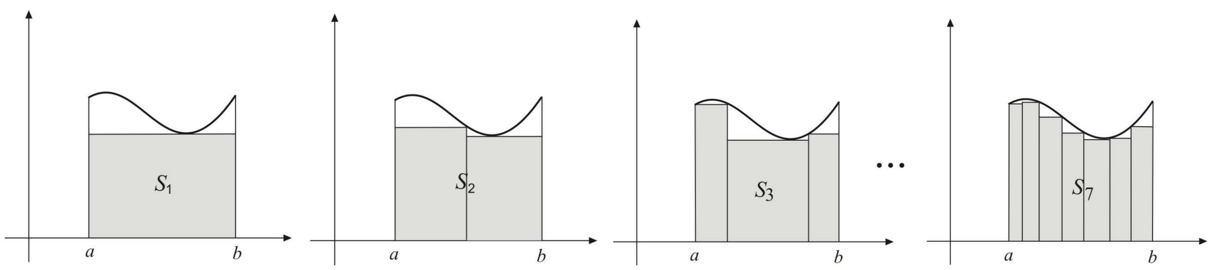


Figura 1.2

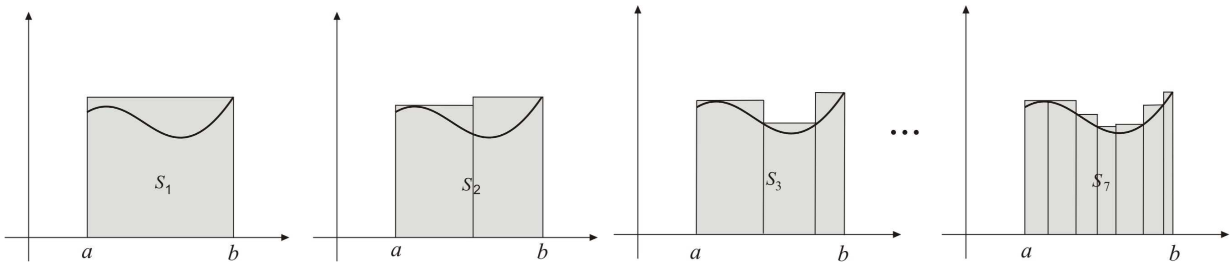


Figura 1.3

Para encontrar a área da região S do Problema 1, primeiramente precisamos dizer o que significa a área de S, e depois tentar calculá-la. A idéia intuitiva de área nos leva a dizer que a área de uma região plana é um número real não negativo. Mas como defini-lo? Poderíamos pensar em definir a área de S como sendo o supremo das áreas dos polígonos (digamos retângulos) contidos em S (ver Figura 1.2). Vamos chamá-lo de medida interna de S, que denotaremos por $m_{\text{int}}(S)$. De forma semelhante, poderíamos pensar em definir a área de S como ínfimo das áreas dos polígonos que contêm S (ver Figura 1.3). Vamos chamar este número de medida externa de S, e indicaremos por $m_{\text{ext}}(S)$. Ao tentar definir a área de S usando $m_{\text{int}}(S)$ ou $m_{\text{ext}}(S)$ surge um problema. Estes dois números nem sempre são iguais (como veremos na Seção 1.2). Assim para evitar uma escolha arbitrária, definiremos a área de S como sendo o número A tal que

$$A = m_{\text{int}}(S) = m_{\text{ext}}(S).$$

Quando $m_{\text{int}}(S) = m_{\text{ext}}(S)$ dizemos que o conjunto S é mensurável, caso contrário é não mensurável.

As noções de $m_{\text{int}}(S)$ e $m_{\text{ext}}(S)$ nos levam as definições de somas inferior e superior, e as definições de integrais inferior e superior. Antes de apresentar estas definições, vamos relembrar os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto e suas propriedades que serão úteis para a compreensão do texto.

Supremo e Ínfimo de um Conjunto

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in A$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se cota superior de A. Analogamente, dizemos que A é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in A$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se cota inferior de A.

Quando o conjunto A é limitado inferiormente e superiormente, dizemos que A é limitado, isto é, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $A \subset [a,b]$.

Uma cota superior de A que pertence a A, chama-se máximo de A e indica-se por $\max A$. Uma cota inferior de A que pertence a A, denomina-se mínimo de A e indica-se por $\min A$.

Exemplo 1.1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$. Temos:

a) $2, 1, -100$ são cotas inferiores de A. O conjunto A é limitado inferiormente.
b) O conjunto A não possui cota superior, isto é, não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in A$. Logo A não é limitado superiormente.
c) 2 é uma cota inferior de A que pertence ao conjunto A. Logo, $\min A = 2$.

Exemplo 1.2. Seja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$. Temos:

a) $-10, -5, -3$ são cotas inferiores de B e $4, 5, 7$ são cotas superiores de B. Segue que B é um conjunto limitado inferiormente e superiormente, logo B é limitado.
b) -3 é uma cota inferior de B que pertence ao conjunto B. Logo, $\min B = -3$.
c) O conjunto B não tem máximo. De fato, para todo $x \in B$ temos $\frac{x+4}{2} \in B$ e $x < \frac{x+4}{2}$. Desta forma, para todo $x \in B$, existe outro número em B que é estritamente maior que x. Portanto, B não admite máximo.

O conjunto B acima é limitado superiormente, e não admite máximo, mas tem uma cota superior que é a menor de todas. Esta situação conduz a definição de **supremo** de um conjunto.

Definição 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo de A, quando b é a menor das cotas superiores de A e indica-se por* $\sup A = b$.

O supremo de um conjunto pode ser caracterizado através das condições (S_1) e (S_2) apresentadas na proposição abaixo.

Proposição 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*

(S_1) *Para todo $x \in A$, tem-se $x \leq b$;*

(S_2) Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$. (Ver Figura 1.4)

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ (S_1) é imediata, pois b é cota superior de A.

Para provar (S_2), suponhamos que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $b - \varepsilon_0 \geq x$ para todo $x \in A$. Assim, $b - \varepsilon_0$ é uma cota superior de A. Como $b - \varepsilon_0 < b$ temos uma contradição, pois b é a menor das cotas superiores. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$.

$(\Leftarrow)$ De (S_1) temos que b é cota superior de A. Falta mostrar que b é a menor das cotas superiores. Suponhamos que exista outra cota superior, digamos c, tal que $c < b$. Então $\varepsilon = b - c > 0$ e por (S_2), existe $x \in A$ tal que $b - (b - c) < x$. Assim, existe $x \in A$ tal que $c < x$ o que é absurdo uma vez que c é uma cota superior de A.

■

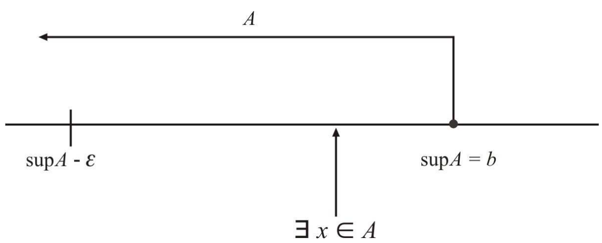


Figura 1.4

Note que (S_1) diz que b é cota superior de A e (S_2) afirma que não existe outra cota superior menor que b. De maneira análoga, define-se o **ínfimo** de um conjunto.

Definição 1.2. *Seja* $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $a \in \mathbb{R}$ *chama-se ínfimo de* A*, quando* a *é a maior das cotas inferiores de* A *e indica-se por* $\inf A = a$.

Proposição 1.2. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. *Um elemento* $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(I_1) *Para todo* $x \in A$*, tem-se* $x \geq a$ *;*

(I_2) *Dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer, existe* $x \in A$ *tal que* $x < a + \varepsilon$. *(Ver Figura 1.5)*

Demonstração. A prova é análoga a da proposição anterior. Fica como exercício.

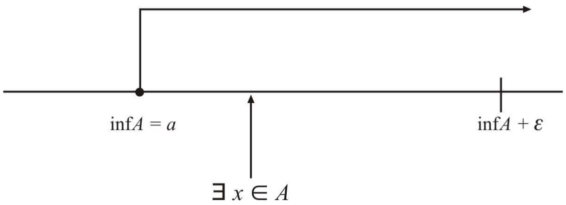


Figura 1.5

Exemplo 1.3. Considere o conjunto B do Exemplo 1.2. Temos:

a) 4 é menor das cotas superiores de B, logo $\sup B = 4$.

b) -3 é a maior das cotas inferiores de B, portanto $\inf B = -3$.

c) Note que o conjunto B possui $\min B = \inf B$, e B não admite elemento máximo, mas possui supremo.

Em $\mathbb{R}$, todo subconjunto limitado superiormente possui supremo. Este fato é apresentado no teorema abaixo.

Teorema 1.1. (Teorema do Supremo) *Todo subconjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo em* $\mathbb{R}$.

De forma análoga ao Teorema do Supremo, temos um resultado que diz que todo conjunto não vazio de números reais que é limitado inferiormente, admite ínfimo.

Lembremos as seguintes propriedades de supremo e ínfimo.

Proposição 1.3. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ *e* $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$. *Se* B *é limitado e* $A \subset B$ *então* (i) $\sup A \leq \sup B$ *e*

(ii) $\inf B \leq \inf A$.

Demonstração.

(i) Por hipótese B é limitado, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in B$. Como $A \subset B$, temos $x \leq b$ para todo $x \in A$. Assim, A é limitado superiormente.

Sendo A e B limitados superiormente, A e B admitem supremos, digamos $\sup A = \alpha$ e $\sup B = \beta$. De $\beta = \sup B$ temos, $x \leq \beta$ para todo $x \in B$. Como $A \subset B$, então vale $x \leq \beta$ para todo $x \in A$. Assim, β uma é cota superior do conjunto A. Mas, α é a menor das cotas superiores de A. Logo, $\alpha \leq \beta$, ou seja, $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Demonstração análoga ao item *(i)*.

■

Exemplo 1.4. Determine, caso existam, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$.

Solução. O conjunto A pode ser escrito como $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.
Temos, $\min A = -2$, $\max A = 2$, $\inf A = -2$ e $\sup A = 2$.

Exemplo 1.5. Considere a função $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Encontre $\sup\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\}$ e $\inf\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-2,2]$, pelo Teorema de **Weierstrass** [1] f assume em $[-2,2]$ valores máximo e mínimo que são 3 e -1, respectivamente. Portanto, $\sup\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\} = 3$ e $\inf\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\} = -1$.

1.2 Integrais Inferior e Superior, e Funções Integráveis

Para definir integrais inferior e superior, precisamos de alguns conceitos relacionados à partição de um intervalo.

Partição de um Intervalo

Uma partição do intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,n$ serão chamados os intervalos da partição P.

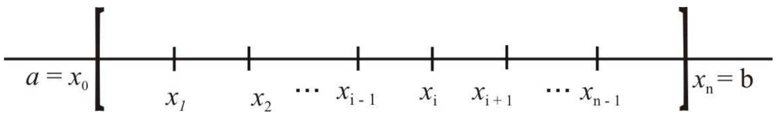


Figura 1.6

Os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de P não precisam ter o mesmo comprimento. O número

$$|P| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), ..., (x_n - x_{n-1})\}$$

é chamado *norma da partição* P.

Sejam P e Q partições de $[a,b]$. Dizemos que Q é mais fina do que P, ou que Q é um refinamento de P, se $P \subset Q$.

Soma Inferior e Soma Superior

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada[2] e $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Definimos a soma inferior $s(f;P)$ e a soma superior $S(f;P)$ da função f, referente à partição P como sendo

[1] **Teorema de Weierstrass.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f assume um valor máximo e um valor mínimo. Isto é, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.

$$s(f;P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S(f;P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

onde

$m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \le x \le x_i\}$, ou seja, $m_i =$ ínfimo dos valores $f(x)$ para x no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, e

$M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \le x \le x_i\}$, ou seja, $M_i =$ supremo dos valores $f(x)$ para x no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Note que

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f;P),$$

pois $m_i \le M_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Ou seja, a soma inferior de f é menor ou igual à soma superior de f relativa à mesma partição.

Quando f é contínua e não-negativa em $[a,b]$, podemos interpretar a soma inferior $s(f;P)$ como sendo uma soma de áreas de polígonos inscritos ao gráfico f, e assim um valor aproximado (por falta) do que intuitivamente entendemos por área da região plana S, delimitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo x. Similarmente, a soma superior $S(f;P)$ pode ser interpretada como uma soma de áreas de polígonos circunscritos ao gráfico de f, e como um valor aproximado (por excesso) da área da região plana S.

A Figura 1.7 ilustra as observações acima.

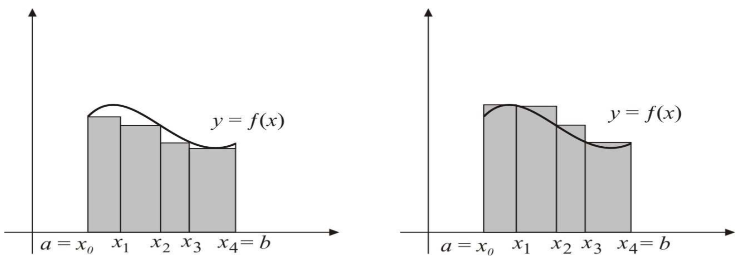


Figura 1.7

Exemplo 1.6. Calcular as somas inferior e superior para função $f(x) = x^2$, definida no intervalo $[0,1]$. Usar a partição $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Solução. Os intervalos da partição P são $[x_0, x_1] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $[x_1, x_2] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Temos

---

[2] Dizer que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **limitada**, significa que existe $c \in \mathbb{R}_*^+$ tal que $|f(x)| \le c$ para todo $x \in [a,b]$.

$$m_1 = \inf\left\{x^2; 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\} = 0, \qquad M_1 = \sup\left\{x^2; 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4},$$
$$m_2 = \inf\left\{x^2; \frac{1}{2} \le x \le 1\right\} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad M_2 = \sup\left\{x^2; \frac{1}{2} \le x \le 1\right\} = 1.$$
Segue que
$$\begin{aligned} s(f;P) &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) \\ &= 0\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} S(f;P) &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

O que acontece com as somas inferior e superior quando acrescentamos um ponto à partição P, ou em geral, quando refinamos P? O próximo teorema mostra que a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Teorema 1.2. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e Q um refinamento de P. Então*

(i) $\quad s(f;P) \le s(f;Q)$ *e*

(ii) $\quad S(f;Q) \le S(f;P)$.

Demonstração. (i) Vamos assumir inicialmente que Q é obtida a partir de P acrescentando um ponto $\bar{x}$, digamos $Q = \{x_0, x_1, ..., x_{i-1}, \bar{x}, x_i, ..., x_{n-1}, x_n\}$.
Sejam m_i, m' e m'' os ínfimos de f nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, \bar{x}]$ e $[\bar{x}, x_i]$, respectivamente.
Temos,
$$\begin{aligned} s(f;Q) = {} & m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + m'(\bar{x} - x_{i-1}) + \\ & m''(x_i - \bar{x}) + m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} s(f;P) = {} & m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + m_i(x_i - x_{i-1}) + \\ & m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$
Fazendo,
$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m'(\bar{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \bar{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= m'(\bar{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \bar{x}) - m_i(x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_{i-1}) \\ &= m'(\bar{x} - x_{i-1}) - m_i(\bar{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \bar{x}) - m_i(x_i - \bar{x}) \\ &= (m' - m_i)(\bar{x} - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - \bar{x}). \end{aligned}$$
Como $m' \ge m_i$ e $m'' \ge m_i$ temos
$$s(f;Q) - s(f;P) \ge 0.$$
Portanto, se Q é obtida a partir de P pelo acréscimo de um ponto temos $s(f;P) \le s(f;Q)$.
Se Q possui vários pontos a mais do que P, basta aplicar este resultado repetidamente, e teremos $s(f;P) \le s(f;Q)$.

(ii) A demonstração no caso das somas superiores é muito parecida, e é deixada como exercício.

■

Como conseqüência do teorema acima, temos que toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior.

Corolário. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada. Para quaisquer partições* P,Q *de* $[a,b]$ *tem-se* $s(f;P)\le S(f;Q)$.

Demonstração. Consideremos a partição $P\cup Q$. Temos que a partição $P\cup Q$ é a mais fina do que P e Q. Pelo Teorema 1.2 segue que

$$s(f;P)\le s(f;P\cup Q)\le S(f;P\cup Q)\le S(f;Q).$$

Portanto, $s(f;P)\le S(f;Q)$.

■

Consideremos o conjunto das somas inferiores referentes a todas as partições de $[a,b]$. Do Corolário acima temos que qualquer soma superior é uma cota superior para o conjunto. Segue que o conjunto é limitado superiormente, e pelo Teorema 1.1 possui supremo. Analogamente, qualquer soma inferior é uma cota inferior para o conjunto formado pelas somas superiores. Assim, faz sentido falar em ínfimo do conjunto formado pelas somas superiores. Estas observações nos levam as definições de integrais inferior e superior.

Definição 1.3. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada. Definimos a integral inferior de* f, *denotada por* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, *e a integral superior de* f, *denotada por* $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, *como sendo*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P) \qquad e \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f,P).$$

O supremo e o ínfimo são tomados relativamente a todas as partições P *do intervalo* $[a,b]$.

Quando $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ dizemos que f é integrável em $[a,b]$. Este valor comum é chamado de integral da função f e indicamos por $\int_a^b f(x)dx$.

Os números a e b são respectivamente os limites inferior e superior da integral, a função $f(x)$ é o integrando e o símbolo $\int$ é um sinal de integração. É comum referir-se à $\int_a^b f(x)\,dx$ como integral definida de f em $[a,b]$.

A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número. Podemos utilizar outras letras para representar a variável independente sem mudar o valor da integral, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(s)\,ds.$$

Exemplo 1.7. (Exemplo de função integrável) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a função constante $f(x)=k$. Mostre que f é integrável em $[a,b]$ e que $\int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)$.

Solução. Seja $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Temos que

$m_i=\inf\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=k$ e $M_i=\sup\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=k$ para todo $i=1,\ldots,n$.

Assim,

$s(f;P)=k(b-a)$ e $S(f;P)=k(b-a)$.

Dado que P é qualquer, temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P)=k(b-a) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f,P)=k(b-a).$$

Como as integrais inferior e superior são iguais, f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)$.

Exemplo 1.8. (Exemplo de função não integrável) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1, & se\ x\ é\ racional \\ -1, & se\ x\ é\ irracional \end{cases}.$$

Mostre que f é não integrável em $[a,b]$.

Solução. Seja $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Em todo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ de P existem números racionais e irracionais. Assim,

$m_i=\inf\{f(x); x_{i-1}\le x\le x_i\}=-1$ e

$M_i=\sup\{f(x); x_{i-1}\le x\le x_i\}=1$ para todo $i=1,...,n$.

Segue que $s(f;P)=-(b-a)$ e $S(f;P)=(b-a)$ para qualquer partição P de $[a,b]$. Logo,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P)=-(b-a) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f;P)=(b-a).$$

Como $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\neq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ temos que f é não integrável em $[a,b]$.

Área de uma Região Plana

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[a,b]$. Definimos a área da região plana S, limitada pelo gráfico de $y=f(x)$, as retas $x=a$, $x=b$ e o eixo x, como sendo a integral de f no intervalo $[a,b]$ (ver figura abaixo). Escrevemos $Área\ S=\int_a^b f(x)dx$.

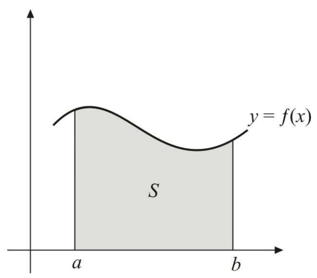


Figura 1.8

Exemplo 1.9. Calcule a área da região S limitada pelo gráfico da função $f(x)=5$, pelas retas $x=2$ e $x=6$, e o eixo do x.

Solução. A Figura 1.9 mostra a região S. Do Exemplo 1.7 temos que a função constante é integrável. Como $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[2,6]$, segue que

$$Área\ S=\int_2^6 5dx=5(6-2)=20\,u.a. \text{ (unidades de área).}$$

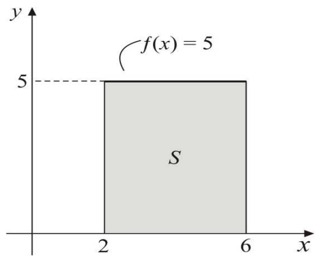


Figura 1.9

O Exemplo 1.8 mostra que nem toda função limitada é integrável. É importante saber quais funções são integráveis. Os Teoremas 1.3 e 1.4, cujas demonstrações serão omitidas, garantem que um grande número de funções é integrável.

Teorema 1.3. *Se* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é uma função contínua então* f *é integrável.*

Teorema 1.4. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada, com um número finito de pontos de descontinuidade. Então,* f *é integrável.*

Exemplo 1.10. Calcule a $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ interpretando-a em termos de área.

Solução. A função $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ é contínua no intervalo $[-3,3]$. Pelo Teorema 1.3 f é integrável no intervalo $[-3,3]$. Como $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[-3,3]$, podemos interpretar a integral como área sob a curva $y=\sqrt{9-x^2}$, x de -3 até 3. Observe que $y^2=9-x^2$, ou

$$x^2+y^2=9 \text{ com } y\geq 0,$$

ou seja, o gráfico da f é a metade do círculo de raio 3.
Portanto,

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{\pi\cdot 3^2}{2}=\frac{9\pi}{2}.$$

1.2.1 Exercícios

1. Determine, caso existam, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo dos conjuntos.
   a) $A=\{x\in\mathbb{R};\ -2\leq x\leq 5\}$; b) $B=\left\{\dfrac{n}{n+1};\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

2. Considere a função $f(x)=-x^2+2$. Determine:
   a) $\sup\{f(x)\,;-3\leq x\leq 1\}$; b) $\sup\{f(x)\,;-3\leq x\leq -1\}$.

3. Calcular as somas inferior e superior para função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ no intervalo $[1,3]$. Usar a partição tal que o comprimento de cada intervalo da partição seja $\dfrac{1}{2}$.

4. Considere a função definida por $f(x)=\begin{cases}-1, & se\ 0\leq x\leq 2\\ 1, & se\ 2\leq x\leq 4\end{cases}$.

A função f é integrável em $[0,4]$? Justifique.

5. Avalie a integral $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ interpretando-a em termos de área.

6. Mostre o item (ii) do Teorema 1.2.

1.3 Integral como Limite de Somas

Na seção anterior definimos a integral de uma função usando a linguagem de supremo e ínfimo de conjunto. Nosso objetivo agora é mostrar que a integral pode ser interpretada como limite de somas, chamadas de somas de Riemann. Para isso precisamos estabelecer alguns resultados.

Teorema 1.5. *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é integrável;*

(ii) *Dado $\varepsilon>0$ qualquer, existem partições P e Q do intervalo $[a,b]$ tais que $S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon$;*

(iii) *Dado $\varepsilon>0$ qualquer, existe uma partição R do intervalo $[a,b]$ tal que $S(f;R)-s(f;R)<\varepsilon$.*

Demonstração. Mostraremos que $(i)\Rightarrow(ii)$.
Temos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f;P).$$

Das Propriedades 1.1 e 1.2, dado $\varepsilon>0$, existem partições P e Q tais que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f;P) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}>S(f;P).$$

Segue das relações acima e de f ser integrável em $[a,b]$ que

$$S(f;P)<\frac{\varepsilon}{2}+\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\frac{\varepsilon}{2}+\underline{\int_a^b} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+s(f;Q).$$

Portanto,

$$S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon.$$

Agora, vamos mostrar que $(ii)\Rightarrow(iii)$.
Seja $\varepsilon>0$. Por hipótese, existem partições P e Q do intervalo $[a,b]$ tais que

$$S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon.$$

Tome a partição $R=P\cup Q$ de $[a,b]$. Então

$s(f;Q)\le s(f;R)$ e $S(f;R)\le S(f;P)$. (Teorema 1.2)

Portanto, $S(f;R)-s(f;R)<\varepsilon$.

Falta mostrar que $(iii)\Rightarrow(i)$. Para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$ temos

$s(f;P)\le S(f;P)$. (Corolário do Teorema 1.2)

Da definição de supremo podemos escrever

$\sup_P s(f;P)\le S(f;Q)$ para qualquer partição Q de $[a,b]$.

Segue que, $\sup_P s(f;P)$ é uma cota inferior do conjunto formado pelas somas superiores e assim,

$$\sup_P s(f;P) \le \inf_P S(f;P).$$

Agora, vamos mostrar que $\sup_P s(f;P) = \inf_P S(f;P)$.

Se fosse $\sup_P s(f;P) < \inf_P S(f;P)$ então $\inf_P S(f;P) - \sup_P s(f;P) > 0$.

Tome $\varepsilon = \inf_P S(f;P) - \sup_P s(f;P)$. Por hipótese, para este ε existe uma partição R do intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f;R) - s(f;R) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Como

$$\inf_P S(f;P) \le S(f;R) \text{ e } s(f;R) \le \sup_P s(f;P)$$

podemos escrever

$$S(f;R) - s(f;R) \ge \inf_P S(f;P) - \sup_P s(f;P) = \varepsilon,$$

o que contraria a desigualdade (1) . Assim,

$$\sup_P s(f;P) = \inf_P S(f;P),$$

ou seja, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Portanto, f é integrável.

■

Lema 1.1. *Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Se Q é um refinamento de P onde $Q = P \cup \{\overline{x}\}$ então $S(f;P) - S(f;Q) \le 2M\,|P|$ onde $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$ e $|P|$ é a norma da partição P.*

Demonstração. Suponhamos que $\overline{x}$ esteja entre x_{i-1} e x_i. Sejam M_i, M' *e* M'' os supremos da f em $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, \overline{x}]$ e $[\overline{x}, x_i]$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
S(f;P) - S(f;Q) &= M_i(x_i - x_{i-1}) - M'(\overline{x} - x_{i-1}) - M''(x_i - \overline{x}) \\
&= M_i(x_i - \overline{x} + \overline{x} - x_{i-1}) - M'(\overline{x} - x_{i-1}) - M''(x_i - \overline{x}) \\
&= M_i(x_i - \overline{x}) + M_i(\overline{x} - x_{i-1}) - M'(\overline{x} - x_{i-1}) - M''(x_i - \overline{x}) \\
&= (M_i - M'')(x_i - \overline{x}) + (M_i - M')(\overline{x} - x_{i-1}) \\
&\le 2M(x_i - \overline{x}) + 2M(\overline{x} - x_{i-1}) \\
&= 2M(x_i - x_{i-1}) \\
&\le 2M\,|P|.
\end{aligned}$$

■

Observação: Generalizando o Lema 1.1, se Q é uma partição de $[a,b]$ obtida pelo acréscimo de n pontos à partição P então $S(f;P) - S(f;Q) \le 2nM\,|P|$.

Teorema 1.6. *A integral superior de uma função limitada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é o limite das somas superiores $S(f;P)$ quando a norma da partição P tende a zero, ou seja,*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} S(f;P).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$0<|P|<\delta \;\Rightarrow\; -\varepsilon+\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S(f;P) < \varepsilon + \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Da definição de integral superior temos

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f;P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a,b].$$

Observe que

$$-\varepsilon+\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S(f;P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a,b].$$

Ainda, da definição de integral superior, para o $\varepsilon>0$ dado existe uma partição $Q=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f;Q) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4(n-1)M}$, onde $M=\sup\{|f(x)|; x\in[a,b]\}$. Seja P uma partição arbitrária com $0<|P|<\delta$. Considere a partição $R=P\cup Q$. Note que a partição R é obtida a partir de P pelo acréscimo de no máximo $n-1$ pontos, pois Q possui $n+1$ pontos onde $x_0=a$ e $x_n=b$. Da observação feita após o Lema 1.1 temos

$$S(f;P)-S(f;R)\le 2M(n-1)|P|.$$

Segue que

$$\begin{aligned} S(f;P) &\le S(f;R)+2M(n-1)|P| && (R \text{ é um refinamento de } Q)\\ &< S(f;Q)+2M(n-1)\frac{\varepsilon}{4(n-1)M}\\ &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, && \text{sempre que } 0<|P|<\delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{|P|\to 0} S(f;P)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

■

De forma análoga, mostra-se que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{|P|\to 0} s(f;P)$.

Soma de Riemann

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada e $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Uma soma de Riemann de f em relação à partição P é qualquer expressão $S_n(f)$ da forma

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1}),$$

onde c_i é um número em $[x_{i-1},x_i]$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Se $f(c_i)>0$ então $f(c_i)(x_i-x_{i-1})$ representa a área do retângulo de base (x_i-x_{i-1}) e altura $f(c_i)$ (ver Figura 1.10).

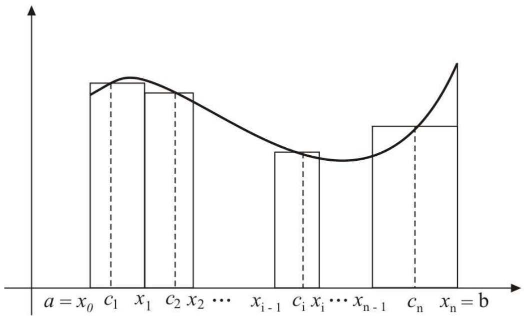


Figura 1.10

Observe que independentemente da escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ temos

$$s(f;P) \le S_n(f) \le S(f;P),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \text{pois} \quad m_i \le f(c_i) \le M_i .$$

Exemplo 1.11. Determine a soma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2$, $0 \le x \le 2$ e P a partição de $[0, 2]$ em 4 subintervalos de mesmo comprimento. Escolha c_i como sendo o extremo direito do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Solução. O número de subintervalos é 4, ou seja, $n = 4$. O comprimento dos subintervalos é $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$. Os subintervalos são $\left[0, \dfrac{1}{2}\right], \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$. Assim, $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = 1$, $c_3 = \dfrac{3}{2}$ e $c_4 = 2$. Logo, a soma de Riemann é

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \sum_{i=1}^{4} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(2)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{4} + 1 - \frac{1}{4} - 2\right] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Teorema 1.7. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. As afirmações são equivalentes:*

(i) f *é integrável;*

(ii) *Existe o* $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ *independentemente da escolha de* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Neste caso, $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Do Teorema 1.6 e f integrável temos

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f;P).$$

Observe que valem as relações

$$s(f;P) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \le S(f;P) \quad \text{independentemente da escolha de } c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Aplicando o limite nas desigualdades quando $|P| \to 0$ e o Teorema do Confronto[3] concluímos que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Para provar que f é integrável em $[a,b]$, mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

Seja $I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Da definição de limite, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |P| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{independentemente à escolha de } c_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2}$$

Fixemos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ com $0 < |P| < \delta$ e tomemos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de duas maneiras. Primeiramente, vamos escolher $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(c_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{4n(x_i - x_{i-1})}$, onde $m_i = \inf\{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} = s(f,P) + \frac{\varepsilon}{4},$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} < s(f,P). \tag{3}$$

Agora, vamos escolher $\overline{c}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(\overline{c}_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{4n(x_i - x_{i-1})}, \text{ onde } M_i = \sup\{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} = S(f,P) - \frac{\varepsilon}{4},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} > S(f,P). \tag{4}$$

Das desigualdades (3) e (4) resultam que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} \;<\; s(f;P) \;\le\; S(f;P) \;<\; \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

De (3), temos que as somas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ e $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1})$ estão no intervalo $\left(I - \frac{\varepsilon}{4}, I + \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Logo, $s(f;P)$ e $S(f;P)$ pertencem ao intervalo $\left(I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, e assim $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Portanto, f é integrável.

■

[3] **Teorema do Confronto**. Sejam f, g e h funções com o mesmo domínio D, sendo $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Se $f(x)$ e $h(x)$ têm o mesmo limite L com $x \to a$ então $g(x)$ também tem limite L com $x \to a$.

O teorema acima garante que se f é integrável em $[a,b]$, então o valor do limite

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

é o mesmo, independentemente da escolha de c_i, e é igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. Se, para uma escolha particular dos c_i, encontrarmos $\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = L$, então teremos $\int_a^b f(x)\,dx = L$. Usaremos esta observação no próximo exemplo.

Exemplo 1.12. Considere a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x$. A função f é integrável em $[a,b]$? Justifique. Caso afirmativo, determine $\int_a^b x\,dx$ como limite de somas de Riemann.

Solução. A função f é contínua em $[a,b]$, então pelo Teorema 1.3 temos f é integrável em $[a,b]$.

Para determinar $\int_a^b x\,dx$ dividiremos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, formaremos as somas de Riemann $S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ onde escolheremos c_i como sendo o extremo direito dos subintervalos da partição P, e calcularemos $\lim_{|P|\to 0} S_n(f)$, que será $\int_a^b x\,dx$.

Com efeito, para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos

$$P=\left\{a,\ a+\frac{(b-a)}{n},\ a+\frac{2(b-a)}{n},\dots,\ a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},\ a+\frac{n(b-a)}{n}=b\right\}$$

a partição que consiste em dividir $[a,b]$ em n partes iguais, cada uma com comprimento $\dfrac{b-a}{n}$.

Para cada subintervalo

$$\left[a+(i-1)\frac{(b-a)}{n}, a+i\frac{(b-a)}{n}\right],\ c_i = a+i\frac{(b-a)}{n} \quad \text{e temos } f(c_i) = a+i\frac{(b-a)}{n}.$$

A soma de Riemann é

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\\
&= \frac{(b-a)}{n}\left[a+\frac{(b-a)}{n}+a+\frac{2(b-a)}{n}+\cdots+a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}+a+\frac{n(b-a)}{n}\right]\\
&= \frac{(b-a)}{n}\left\{na+\frac{(b-a)}{n}\left[1+2+\cdots+(n-1)+n\right]\right\}\\
&= a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\left[\frac{(1+n)n}{2}\right] \qquad \text{(soma P.A com } n \text{ termos)}\\
&= ab-a^2+\frac{(b-a)^2}{2n}+\frac{(b-a)^2}{2}\\
&= \frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Como os comprimentos dos intervalos da partição P são iguais a $\frac{b-a}{n}$, fazer $|P|$ tender a zero equivale a fazer n tender a ∞. Logo,

$$\lim_{|P|\to 0} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{n}\right] = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Portanto, $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

1.3.1 Exercícios

1. Determine a soma de Riemann $S_n(f)$ da função $f(x)=3x-2$, onde $P=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}$ é a partição do intervalo $[1,5]$ em quatro subintervalos de mesmo comprimento, e:
   a) c_i é o extremo direito de intervalo $[x_{i-1},x_i]$;
   b) c_i é o extremo esquerdo do intervalo $[x_{i-1},x_i]$;
   c) c_i é o ponto médio de $[x_{i-1},x_i]$.

2. Considere a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$.
   (i) f é integrável em $[0,1]$? Justifique.
   (ii) Encontre $\int_0^1 x^2dx$ como limite de somas de Riemann.
   Sugestão: Dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais, escolher c_i como sendo o extremo direito dos subintervalos, e usar a relação $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Considere a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$.
   (i) f é integrável em $[a,b]$? Justifique.
   (ii) Encontre $\int_a^b e^x dx$ como limite de somas de Riemann.

1.4 Propriedades da Integral

Na definição $\int_a^b f(x)\,dx$, assumimos $a<b$. Nos casos em que $a=b$ e $a>b$ definimos as integrais como sendo

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

respectivamente.

Teorema 1.8. *Sejam f, g funções integráveis em $[a,b]$ e $k\in\mathbb{R}$. Então:*

a) $k\,f$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$;

b) $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;

c) Se $f(x)\ge 0$ para todo $x\in[a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$;

d) Se $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$*, então* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Demonstração. Vamos provar os itens (a), (c) e (d). O item (b) deixamos como exercício.
(a) Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Toda soma de Riemann da função $k\,f$ é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ onde } c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Como f é integrável em $[a,b]$ então existe

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$ independentemente da escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, e é igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Assim,

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = k \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Portanto, $k\,f$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

(c) Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Como f é integrável em $[a,b]$ então existe

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$ independentemente da escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, e é $\int_a^b f(x)\,dx$.

Como $f(c_i) \geq 0$ para todo $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Portanto, $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0$, ou seja, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(d) De $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ segue que

$(f - g)(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Dos itens (a) e (b) temos que $f - g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Aplicando o item (c) à função $f - g$ temos,

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0.$$

Portanto, $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

■

Exemplo 1.13. Calcule a integral $\int_1^5 (3x+4)\,dx$.

Solução. Dos Exemplos 1.7 e 1.12 temos

$$\int_1^5 4dx = 4(5-1) = 16 \quad \text{e} \quad \int_1^5 x\,dx = \frac{25-1}{2} = 12.$$

Pelos itens (a) e (b) do Teorema 1.8 podemos escrever

$$\int_1^5 (3x+4)\,dx = 3\int_1^5 x\,dx + \int_1^5 4dx$$
$$= 3\cdot 12 + 16 = 52\,.$$

Exemplo 1.14. Sejam f uma função integrável em $[a,b]$ e $m, M \in \mathbb{R}$. Mostre que se $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$ então $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Solução. Considere as funções g e h definidas por $g(x) = m$ e $h(x) = M$ para todo $x \in [a,b]$. Temos que g e h são integráveis em $[a,b]$, pois são funções constantes, e

$$\int_a^b m dx = m(b-a) \quad \text{e} \quad \int_a^b M dx = M(b-a)\,.$$

Como $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$, segue pelo item (d) do Teorema 1.8 que

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Teorema 1.9. *Se* $a < c < b$ *e* f *é integrável em* $[a,c]$, *em* $[c,b]$ *e em* $[a,b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Seja P uma partição de $[a,b]$. Como $c \in (a,b)$ então ou c é um ponto da partição P, isto é, $c = x_i$ para algum i, ou c está no interior de algum subintervalo da partição P, ou seja, $c \in (x_{i-1}, x_i)$. Considere a partição P' de $[a,b]$ formada da seguinte maneira: se c for um ponto da partição P então P' será a própria P. Se $c \in (x_{i-1}, x_i)$ para algum i, então P' será a partição formada por todos os pontos de P mais o ponto c. Assim, os subintervalos da partição P' serão os mesmos de P, com exceção do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que será dividido em $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$. Desta forma teremos $|P'| \le |P|$.

Suponhamos que na partição P' o intervalo $[a,c]$ foi dividido em l subintervalos e o intervalo $[c,b]$ foi dividido em $n-l$ subintervalos.

A função f integrável em $[a,b]$, então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \right] \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

Como $|P'| \le |P|$, temos que $|P'| \to 0$ quando $|P| \to 0$. Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P'|\to 0} \sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|P'|\to 0} \sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Como a função f integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ temos que os limites na igualdade acima são respectivamente $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$.

Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

■

Exemplo 1.15. Considere a função $f(x)=\begin{cases}2, & se\ 0\le x\le 2\\ x, & se\ 2<x\le 5\end{cases}$. Calcular a integral $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Solução. A função f é integrável em $[0,5]$, pois é contínua (Teorema 1.3).
Temos que f é integrável em $[0,2]$ e

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 2dx=2(2-0)=4.$$

f é integrável em $[2,5]$ e

$$\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5 x\,dx=\frac{5^2-2^2}{2}=\frac{21}{2}.$$

Logo pelo Teorema 1.9 temos

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)\,dx&=\int_0^2 2dx+\int_2^5 x\,dx\\&=4+\frac{21}{2}=\frac{29}{2}.\end{aligned}$$

1.4.1 Exercícios

1. Calcule a integral $\int_3^3 x\,\mathrm{sen}\,x^2dx$.

2. Escreva a integral como uma única integral da forma $\int_a^b f(x)\,dx$.

   a) $\int_2^5 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx+\int_7^{10} f(x)\,dx$.

   b) $\int_2^3 f(x)\,dx-\int_5^3 f(x)\,dx+\int_5^7 f(x)\,dx$.

3. Se $\int_0^1 f(t)\,dt=1$, $\int_0^4 f(t)\,dt=-2$ e $\int_3^4 f(t)\,dt=2$. Encontre $\int_1^3 2f(t)\,dt$.

4. Mostre o item (b) do Teorema 1.8.

1.5 Teorema Fundamental do Cálculo

Calcular integrais definidas usando somas de Riemann é trabalhoso, mesmo para funções simples. Nesta seção vamos demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo[4] que estabelece uma conexão entre as operações de derivação e integração. Este teorema permite encontrar a integral definida, para uma classe de funções, de maneira rápida e simples sem utilizar limites de somas. Para isso, introduzimos o conceito de primitiva de uma função.

Definição 1.4. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função. Uma primitiva de* f *em* $[a,b]$ *é uma função derivável* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *tal que* $F'(x)=f(x)$ *para todo* $x\in[a,b]$.

Exemplo 1.16.

[4] Este teorema foi estabelecido independentemente por Sir Isaac Newton (1642-1727) na Inglaterra e Gottfried Leibniz (1646-1716) na Alemanha.

a) Se $f(x)=2x$ então $F(x)=x^2$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
b) Se $f(x)=2e^{2x}$ então $F(x)=e^{2x}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
c) Se $f(x)=\operatorname{sen} x$ então $F(x)=-\cos x$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
d) Se $f(x)=\cos(2x)$ então $F(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
e) Se $f(x)=3^x$ então $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
f) Se $f(x)=x^4$ então $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.
g) Para toda constante c $(c\in\mathbb{R})$, $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+c$ é uma primitiva da função $f(x)=x^4$.

Note que se $F(x)$ é uma primitiva de f em $[a,b]$ então para toda constante c $(c\in\mathbb{R})$, a função $G(x)=F(x)+c$ também é primitiva de f em $[a,b]$.

A proposição a seguir, estabelece que se $F(x)$ é uma primitiva particular de f então toda primitiva de f é da forma $F(x)+c$.

Proposição 1.4. *Se $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ são primitivas da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então existe uma constante $c\in\mathbb{R}$ tal que $G(x)=F(x)+c$ para todo $x\in[a,b]$.*

Demonstração. Considere a função $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $H(x)=G(x)-F(x)$. Temos que

$$H'(x)=\left(G(x)-F(x)\right)'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad \text{para todo } x\in(a,b).$$

Como a função H possui derivada nula em todos os pontos de (a,b), segue de um resultado[5] visto no Cálculo I, que H é uma função constante. Portanto, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $G(x)-F(x)=c$, ou seja, $G(x)=F(x)+c$ para todo $x\in[a,b]$.

■

Teorema 1.10. (Teorema Fundamental do Cálculo – TFC) *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva de f então $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.*

Demonstração. Seja $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$.
Temos que F é derivável em $[a,b]$, e conseqüentemente F é contínua em $[a,b]$. Segue que F é contínua e derivável em cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ da partição P. Aplicando o Teorema do Valor Médio[6] em cada intervalo de P, existe $c_i\in(x_{i-1},x_i)$ tal que

$$F'(c_i)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \quad \text{para todo } i=1,...,n.$$

---

[5] *Se uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x\in(a,b)$, então f é constante. (página 233 do material de Cálculo I)*

[6] **Teorema do Valor Médio.** Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Como $F'(c_i) = f(c_i)$ resulta que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Podemos escrever

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (c_i \text{ escolhido como acima})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$
$$= F(b) - F(a).$$

Assim,

$$\lim_{|P| \to 0} S_n(f) = F(b) - F(a).$$

Como f é integrável então o valor deste limite é o mesmo, independentemente da escolha dos c_i, e portanto $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

■

É comum expressar a diferença $F(b) - F(a)$ por $F(x)\Big|_a^b$.

Exemplo 1.17. Calcular as seguintes integrais definidas:

a) $\int_1^2 x^2\,dx$;

b) $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3)\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\,dx$.

Solução. a) A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$. Logo,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2$$
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

b) Aplicando as propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^1 (2x^3 + 3)\,dx = 2\int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 3dx$$
$$= 2\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 + 3x\Big|_{-1}^1$$
$$= 2\left[\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right] + 3[1 - (-1)]$$
$$= 6.$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$$
$$= -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$
$$= 1 + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2 + 8}{8}.$$

Exemplo 1.18. Calcule a $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$.

Solução. A função $f(x) = |x|$ pode ser escrita como
$$f(x) = \begin{cases} -x, \ se\ -2 \le x \le 0 \\ x, \ se\ 0 < x \le 2 \end{cases}.$$
Das propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos
$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$
$$= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}$$
$$= 2 + 2 = 4.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicado para calcular a integral definida de uma função f, quando se conhece uma primitiva de f. No que segue, mostraremos que toda função contínua em $[a,b]$ possui uma primitiva.

Se uma função f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável no intervalo $[a,x]$ para qualquer $x \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ a integral $\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ é um número e é único. Assim podemos definir uma função G que a cada $x \in [a,b]$ associa esse número. Mostraremos que G é uma primitiva de f.

Teorema 1.11. *Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então a função $G:[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$, é derivável e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.*

Demonstração. Seja $c \in [a,b]$. Para encontrar a derivada da função G determinaremos as derivadas laterais da G no ponto c. Inicialmente mostraremos que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(c+h) - G(c)}{h} = f(c).$$
Vamos assumir $h > 0$ e admitir que $c + h \in [a,b]$. Pela definição da G,
$$G(c+h) - G(c) = \int_{a}^{c+h} f(t)\,dt - \int_{a}^{c} f(t)\,dt$$
$$= \int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{c+h} f(t)\,dt - \int_{a}^{c} f(t)\,dt \qquad \text{(Teorema 1.9)}$$
$$= \int_{c}^{c+h} f(t)\,dt.$$
A função f é contínua em $[c, c+h]$, então pelo Teorema de Weierstrass existem $x_1, x_2 \in [c, c+h]$ tais que
$$f(x_1) \le f(t) \le f(x_2) \text{ para todo } t \in [c, c+h].$$
Pelo Exemplo 1.14 podemos escrever

$$f(x_1)h \;\le\; \int_c^{c+h} f(t)\,dt \;\le\; f(x_2)\,h.$$

Como $h>0$ e $\int_c^{c+h} f(t)\,dt = G(c+h)-G(c)$ temos

$$f(x_1) \;\le\; \frac{G(c+h)-G(c)}{h} \;\le\; f(x_2). \qquad (5)$$

Note que se $h\to 0^+$ então $x_1 \to c^+$ e $x_2 \to c^+$, pois x_1 e x_2 estão entre c e $c+h$. Da continuidade de f podemos escrever

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_1) = \lim_{x_1\to c^+} f(x_1) = f(c) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0^+} f(x_2) = \lim_{x_2\to c^+} f(x_2) = f(c).$$

Fazendo $h\to 0^+$ na desigualdade (5) e aplicando o Teorema do Confronto obtemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(c+h)-G(c)}{h} = f(c),$$

ou seja, para c tal que $c+h\in[a,b]$ temos,

$$G_+^{'}(c) \text{ existe e } G_+^{'}(c) = f(c).$$

De forma análoga mostra-se que $G_-^{'}(c) = f(c)$ e assim $G^{'}(c) = f(c)$. Observe que para a e b temos apenas $G_+^{'}(a) = f(a)$ e $G_-^{'}(b) = f(b)$. Segue que G é derivável e $G'(x) = f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

■

Exemplo 1.19. Encontre a derivada da função $G(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt.$

Solução. Como $f(t) = \operatorname{sen} t^2$ é contínua, então pelo Teorema 1.11 temos que $G'(x) = f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

Exemplo 1.20. Calcule $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2} e^t dt$.

Solução. Vamos aplicar o Teorema 1.11 juntamente com a Regra da Cadeia. Fazendo $u = x^2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^t dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} e^t dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} e^t dt\right]\cdot\frac{du}{dx} \\ &= e^u\cdot 2x \;= 2xe^{x^2}.\end{aligned}$$

1.5.1 Exercícios

1. Calcular as integrais abaixo:

   a) $\int_{-2}^{2}(2x+x^4)\,dx$;   b) $\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$;

   c) $\int_0^1 3e^{2x}dx$;   d) $\int_0^1 3^t\,dt$.

2. Achar as derivadas das seguintes funções:

   a) $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$;

   b) $F(x) = \int_x^3 \ln t^2 dt$;   (Sugestão: escreva $\int_x^3 \ln t^2 dt = -\int_3^x \ln t^2 dt$)

c) $H(x)=\int_{2}^{e^{-x}} \cos t\, dt$.

3. Calcule a integral definida $\int_{-3}^{6} |x-4|\,dx$.

1.6 Integral Indefinida

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação entre primitiva e integral definida. Para representar a família de todas as primitivas de uma função f introduzimos a notação $\int f(x)\,dx$, que de acordo com a definição abaixo será chamada de **integral indefinida**.

Definição 1.5. *Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I, a expressão $F(x)+c$ onde c é uma constante arbitrária, é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por $\int f(x)\,dx = F(x)+c$.*

Da definição acima temos

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \quad \Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x).$$

Note que a integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas), enquanto a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número.

Propriedades da Integral Indefinida

Teorema 1.12. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas em um intervalo I, que possuem primitivas, e k uma constante não nula. Então:*

a) $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;

b) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Demonstração.

a) Seja F uma primitiva de f. Temos kF é uma primitiva da função kf, pois

$$\big(kF(x)\big)' = kF'(x) = k\,f(x) \text{ para todo } x\in I.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int k\, f(x)\,dx &= kF(x)+c \\ &= k\left[F(x)+\frac{c}{k}\right] \\ &= k\left[F(x)+c_1\right] \\ &= k\int f(x)\,dx.\end{aligned}$$

b) Deixamos à você como exercício.

Exemplo 1.21.

a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, pois $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

b) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$, pois $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = e^{2x}$.

c) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$, pois $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

Podemos construir uma tabela de integrais, a partir das derivadas das funções elementares. Chamamos estas integrais de imediatas. No que segue listamos algumas integrais imediatas.

Tabela de Integrais Imediatas

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ($\alpha$ é constante e $\alpha \neq -1$)
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $a > 0$ e $a \neq 1$
6. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$
8. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
10. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + c$
11. $\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cossec} x + c$
12. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arc\,tg} x + c$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc\,sec}|x| + c$.

Exemplo 1.22. Calcular a integral indefinida $\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x\right) dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x\right) dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \operatorname{sen} x\, dx \quad \text{(propriedade da integral)}\\ &= \ln|x| + c_1 - \cos x + c_2 \quad (c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias})\\ &= \ln|x| - \cos x + c \quad (c = c_1 + c_2).\end{aligned}$$

Exemplo 1.23. Calcular a integral indefinida $\int \frac{x^3+3x^2+4}{x}\,dx$.

Solução.

$$\int \frac{x^3+3x^2+4}{x}\,dx = \int\left(x^2+3x+\frac{4}{x}\right)dx$$

$$= \int x^2dx + 3\int x\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx \quad \text{(propriedades da integral)}$$

$$= \frac{x^3}{3}+c_1+3\frac{x^2}{2}+c_2+4\ln|x|+c_3$$

$$= \frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4\ln|x|+c \qquad (c=c_1+c_2+c_3).$$

Observação: Quando tivermos uma soma de várias integrais indefinidas, escreveremos uma única constante para indicar a soma das constantes de integração.

Exemplo 1.24. Calcule a integral indefinida $\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Solução.

$$\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\frac{2}{x^3}\right)dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx + 2\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \int \operatorname{tg} x \sec x\,dx + 2\int x^{-3}\,dx$$

$$= \sec x + \frac{2x^{-2}}{-2}+c$$

$$= \sec x - \frac{1}{x^2}+c\,.$$

Exemplo 1.25. Calcule a integral definida $\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}\,dx$.

Solução.

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+1} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1 \quad \text{(tabela - item 12 e TFC)}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

1.6.1 Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int (3x^2+x^4+1)\,dx$; b) $\int \frac{t^3+9}{t^2}\,dt$;

c) $\int e^{-x}dx$; d) $\int \frac{x^2 \ln x}{\ln x^2}dx$;

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx$; f) $\int \sqrt{\frac{4}{1-x^2}}\,dx$.

2. Verifique por diferenciação que a igualdade está correta.

a) $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$;

b) $\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2-2x+2)+c$;

c) $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+c$.

3. Determinar a função $f(x)$ tal que:

$$\int f(x)\,dx = 3\operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{3x^6}+c.$$

4. Calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^2 (e^{2x}+x^2)\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 2\theta)\,d\theta$.

1.7 Técnicas de Integração

Muitas vezes, para calcular uma integral indefinida precisamos usar certos artifícios matemáticos para transformá-la em outra integral mais simples de ser obtida. Nesta seção vamos apresentar duas técnicas básicas para calcular integrais indefinidas, que são:

- Método da Substituição ou Mudança de Variável, e
- Método da Integração por Partes.

No próximo capítulo veremos outras técnicas de integração.

1.7.1 Método da Substituição ou Mudança de Variável

Sejam f e F funções tais que $F' = f$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem da g esteja no domínio de F. Podemos considerar a função composta Fog. Aplicando a Regra da Cadeia e usando o fato $F' = f$ temos

$$\begin{aligned}[F(g(x))]' &= F'(g(x))\cdot g'(x)\\ &= f(g(x))\cdot g'(x).\end{aligned}$$

Assim, obtemos a fórmula de integração pelo método da substituição

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+c.$$

Se fizermos a mudança de variável $u = g(x)$ e substituirmos $g'(x)\,dx$ pela diferencial[7] du então

[7] Diferenciais foram vistas no Cálculo 1. Se $u = g(x)$ então $du = g'(x)dx$.

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c\,.$$

A técnica da mudança de variável é uma ferramenta poderosa para calcular integrais indefinidas, que permite substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.26. Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$;

b) $\int \cos\left(3x+2\right)dx$;

c) $\int 3x^2\left(x^3+2\right)^{10}\,dx$.

Solução.

a) Para calcular a integral $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$ faremos a mudança de variável

$u = x^2$ e obtemos $du = 2x\,dx$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int 2x\,e^{x^2}\,dx &= \int e^u\,du \\ &= e^u + c \qquad \text{(voltando à variável inicial } x\text{)} \\ &= e^{x^2} + c\,.\end{aligned}$$

b) Para calcular a integral $\int \cos(3x+2)\,dx$ faremos a substituição

$u = 3x+2$ e obtemos $du = 3dx$ ou $\dfrac{du}{3} = dx$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)\,dx &= \int \frac{\cos u}{3}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int \cos u\,du \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + c \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+2) + c\,.\end{aligned}$$

c) Encontraremos a $\int 3x^2(x^3+2)^{10}\,dx$ fazendo a mudança de variável

$u = x^3+2$. Segue que $du = 3x^2dx$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int 3x^2(x^3+2)^{10}\,dx &= \int u^{10}du \\ &= \frac{u^{11}}{11} + c \\ &= \frac{(x^3+2)^{11}}{11} + c\,.\end{aligned}$$

Exemplo 1.27. Use o método da substituição para mostrar que $\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + c$.

Solução.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Fazendo $u = \cos x$ obtemos $du = -\operatorname{sen} x\, dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\, dx &= -\int \frac{du}{u}\\ &= -\ln|u| + c\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c\\ &= \ln|\sec x| + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.28. Calcule a integral indefinida $\int x^2\sqrt{1+x}\, dx$.

Solução. Fazendo $t^2 = 1+x$ com $t \geq 0$ obtemos $2t\, dt = dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\, dx &= \int (t^2-1)^2 \cdot t \cdot 2t\, dt\\ &= 2\int (t^2-1)^2 \cdot t^2 dt\\ &= 2\int (t^4-2t^2+1)\cdot t^2 dt\\ &= 2\int (t^6-2t^4+t^2)\, dt\\ &= 2\left[\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right] + c\\ &= 2t^3\left[\frac{t^4}{7} - \frac{2t^2}{5} + \frac{1}{3}\right] + c\\ &= 2(1+x)\sqrt{(1+x)}\left[\frac{(1+x)^2}{7} - \frac{2(1+x)}{5} + \frac{1}{3}\right] + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.29. Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Solução.

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

Fazendo $u = x-1$ obtemos $du = dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-2x+5} &= \int \frac{1}{u^2+4}\, du\\ &= \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{u^2+4}{4}}\, du\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} \qquad \text{(fazendo } t = \frac{u}{2} \text{ obtemos } 2dt = du\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \qquad \text{(tabela)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{(x-1)}{2} + c\,.$$

O método da substituição de variável pode ser usado para calcular integrais definidas. Podemos utilizá-lo de duas formas:

1. Mudamos os limites de integração ao fazer a mudança de variável, e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Neste caso, a fórmula da integração torna-se

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,. \qquad (u = g(x))$$

2. Calculamos a integral indefinida correspondente, e em seguida aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 1.30. Calcule a integral definida $\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}dx$.

Solução. Fazendo $u = x^2+1$ obtemos $du = 2x\,dx$. Para encontrar os novos limites de integração, notemos que

se $x = 0$ então $u = 1$;
se $x = 2$ então $u = 5$.

Assim,

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\int_1^5 \frac{du}{u}$$

$$= 2\ln|u|\Big|_1^5$$

$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$

$$= 2\ln 5\,.$$

Outra maneira de calcular a integral definida é obter primeiramente a integral indefinida, e em seguida aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vejamos:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\int \frac{du}{u} \qquad (u = x^2+1\text{, temos } du = 2x\,dx)$$

$$= 2\ln|u| + c$$

$$= 2\ln(x^2+1) + c\,.$$

Aplicando o TFC, temos

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2-1}\,dx = 2\ln(x^2+1)\Big|_0^2$$
$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 5.$$

Exemplo 1.31. Encontre a área da região S limitada pelo gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, pelas retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$, e o eixo dos x.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.11.

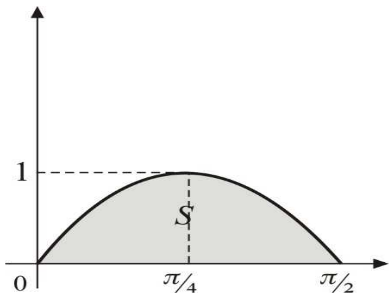


Figura 1.11

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região S (ver definição na Seção 1.2) é dada por

$$Área\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\,dx.$$

Fazendo $u = 2x$ obtemos $du = 2dx$. Os novos limites de integração são:

se $x = 0$ então $u = 0$;

se $x = \frac{\pi}{2}$ então $u = \pi$.

Logo,

$$Área\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\,du$$
$$= -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0)$$
$$= 1 u.a.$$

1.7.2 Exercícios

1. Calcular as integrais indefinidas.

   a) $\int \sqrt[3]{3x-1}\,dx$; b) $\int \cos(5x+2)\,dx$;

   c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$; d) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

e) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$;   f) $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+20}$.

2. Calcular as integrais definidas usando o método da mudança de variável.

a) $\int_0^2 \dfrac{x^2}{x^3+1}\, dx$;   b) $\int_{\frac{1}{3}}^2 \dfrac{3dx}{x \ln^2 3x}$;

c) $\int_1^2 x e^{3x^2}\, dx$;   d) $\int_0^3 2x 3^{x^2}\, dx$.

3. Calcule a integral $\int \sec x\, dx$.

Sugestão: Escreva $\sec x = \sec x \dfrac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)}$.

4. Mostre que $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + c$, onde $a \neq 0$.

1.7.3 Método da Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis num mesmo intervalo I. Pela regra da derivada do produto temos

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Note que $[f(x) \cdot g(x)]$ é uma primitiva de $[f(x) \cdot g(x)]'$. Assim podemos escrever

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]\, dx = f(x) \cdot g(x) + c_1,$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + c_1.$$

Observe que ao desenvolver a integral no segundo membro surgirá outra constante de integração. Supriremos a constante c_1 na fórmula acima, e no final do processo introduziremos uma constante c para representar todas as constantes de integração envolvidas. Deste modo podemos escrever

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx,$$

que é a fórmula de integração por partes.

Vamos reescrever a fórmula da integração por partes, usando uma notação que se torna fácil de ser memorizada. Fazendo

$$u = f(x) \text{ e } v = g(x) \text{ temos } du = f'(x)dx \text{ e } dv = g'(x)\, dx.$$

Então a fórmula da integração por partes pode ser escrita como

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Exemplo 1.32. Calcular a integral $\int x \cos x\, dx$.

Solução. Vamos aplicar o método da integração por partes para calcular a integral. Para isso devemos escolher u e dv. Fazendo

$u = x$ e $dv = \cos x\, dx$, temos

$du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$.

Aplicando a fórmula da integração por partes obtemos,

$$\int x\cos x\, dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

Exemplo 1.33. Calcular a integral $\int \ln x\, dx$.

Solução. Fazendo

$u = \ln x$ e $dv = dx$, temos

$du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = x$.

Logo,

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx$$
$$= x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + c.$$

Exemplo 1.34. Calcular a integral $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Solução. Fazendo

$u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = dx$ obtemos

$du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e $v = x$.

Aplicando a fórmula de integração por partes temos

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para calcular a integral $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ faremos a mudança de variável,

$t = 1-x^2$ e obtemos $dt = -2x\, dx$.

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_1$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + c_1.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c, \text{ onde } (c = -c_1).$$

Exemplo 1.35. Calcular a integral $\int x^2\cos 2x\, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = x^2 \qquad \text{e} \qquad dv = \cos 2x\,dx \quad \text{obtemos}$$

$$du = 2x\,dx \qquad \text{e} \qquad v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x\,.$$

Assim,

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{sen}\,2x - \int x\,\text{sen}\,2x\,dx\,.$$

Para calcular a $\int x\,\text{sen}\,2x\,dx$ devemos aplicar novamente o método da integração por partes. Fazendo

$$u = x \qquad \text{e} \qquad dv = \text{sen}\,2x\,dx \quad \text{obtemos}$$

$$du = dx \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x\,.$$

Segue que,

$$\int x\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\text{sen}\,2x + c_1\,.$$

Portanto,

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{sen}\,2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\text{sen}\,2x + c\,.$$

Exemplo 1.36. Calcular a integral $\int e^{3x} \cos x\,dx$.

Solução. Fazendo

$$u = e^{3x} \qquad \text{e} \qquad dv = \cos x\,dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x}dx \qquad \text{e} \qquad v = \text{sen}\,x\,.$$

Assim,

$$\int e^{3x} \cos x\,dx = e^{3x}\,\text{sen}\,x - 3\int e^{3x}\,\text{sen}\,x\,dx\,.$$

Para calcular a integral $\int e^{3x}\,\text{sen}\,x\,dx$ aplicamos novamente a integração por partes. Fazendo

$$u = e^{3x} \qquad \text{e} \qquad dv = \text{sen}\,x\,dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x}dx \qquad \text{e} \qquad v = -\cos x\,.$$

Segue que,

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,x\,dx = -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\,dx\,.$$

Logo,

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\,\text{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x - 9\int e^{3x}\cos x\,dx\,.$$

Note que a integral do segundo membro é igual a integral que queremos calcular. Chamando $I = \int e^{3x}\cos x\,dx$ podemos escrever

$$I = e^{3x}\,\text{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x - 9I\,,$$

ou seja,

$$I = \frac{1}{10}[e^{3x}\,\text{sen}\,x + 3e^{3x}\cos x]\,.$$

Portanto,

$$\int e^{3x}\cos x\,dx=\frac{e^{3x}}{10}[\operatorname{sen} x+3\cos x]+c\,.$$

Podemos calcular integrais definidas usando integração por partes. Combinando a fórmula de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx= f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx\,,$$

que é a fórmula de integração por partes para integral definida.

Exemplo 1.37. Avalie a integral $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Solução. Fazendo

$u = f(x) = \ln x$ e $dv = g'(x)\,dx = x\,dx$ obtemos

$du = f'(x)\,dx=\frac{1}{x}dx$ e $v = g(x)=\frac{x^2}{2}$.

Usando a fórmula da integração por partes para integral definida temos,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x\,dx&=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x}{2}dx\\&=\left(\frac{2^2}{2}\ln 2-\frac{1^2}{2}\ln 1\right)-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2\\&=2\ln 2-\left(\frac{2^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\\&=2\ln 2-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

1.7.4. Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas:

   a) $\int x^2e^x dx$; b) $\int (x-3)\sec^2 x\,dx$;

   c) $\int x^4\ln x\,dx$; d) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

   e) $\int \ln(x^2+1)\ dx$;

   Sugestão: Aplicar o método da integração por partes e escrever $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$.

   f) $\int \sec^3 x\,dx$;

   Sugestão: Escreva $\sec^3 x=\sec x\cdot\sec^2 x$ e use $\sec^2 x=\operatorname{tg}^2 x+1$.

2. Calcular as integrais definidas:

a) $\int_1^2 x e^x dx$;   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos 2x\, dx$;

c) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$;   d) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3. Use o método da integração por partes para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

Sugestão: Expresse $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x$.

4. Suponha que f'' é contínua em $[a,b]$. Mostre que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-x) f''(x)\, dx.$$

1.8 Cálculo de Áreas

Vimos na Seção 1.2 que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, a área da região plana S limitada pelas retas $x=a$, $x=b$ e $y=0$, e pelo gráfico de f é dada por $\text{Área } S = \int_a^b f(x)\, dx$.

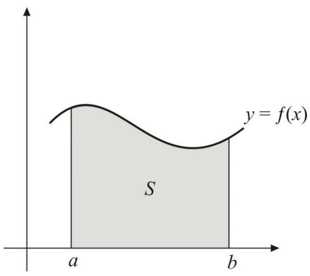
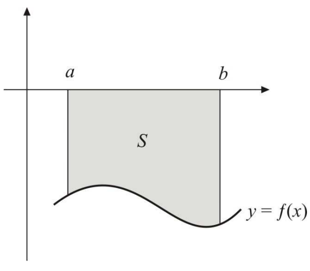


Figura 1.12

Podemos estender o cálculo de área para uma classe mais ampla de regiões planas. Vamos assumir que as funções envolvidas são funções integráveis. Vejamos:

1. Se $f(x)\leq 0$ para todo $x\in[a,b]$, então $-f(x)\geq 0$ e assim $\text{Área } S = -\int_a^b f(x)\, dx$.



$$S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\leq x\leq b \ \ e \ \ f(x)\leq y\leq 0\right\}$$

Figura 1.13

Observação: Se a região S é descrita como na Figura 1.14 então

$$\text{Área } S = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx.$$

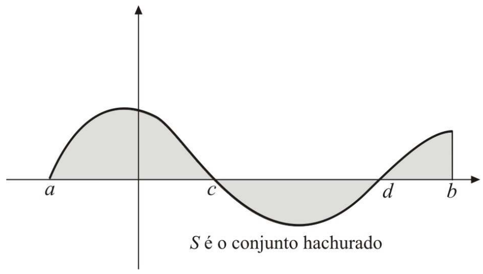
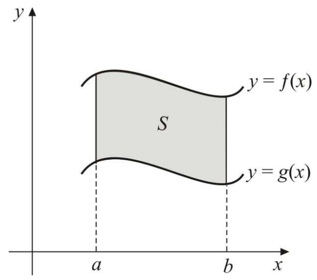


Figura 1.14

2. Se a região plana está entre os gráficos de duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\acute{A}rea\ S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.



$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b\ \ e\ \ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$
Figura 1.15

A Figura 1.15 ilustra o caso onde S é a região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelos gráficos das funções f e g com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Note que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se for mantido $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, mesmo que g não satisfaça a condição $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, o cálculo da área do conjunto S continua o mesmo. As Figuras 1.16 (a) e 1.16 (b) ajudam a visualizar o cálculo da área.

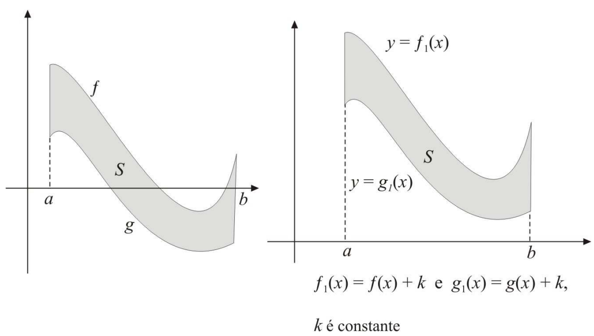


Figura 1.16.

Exemplo 1.38. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x = 1, x = 2$ e $y = 0$, e pela curva $y = x^3 + 2$.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.17.

$$\acute{A}rea\ S = \int_1^2 (x^3 + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 2x \right) \Bigg|_1^2$$
$$= \frac{23}{4} u.a.$$

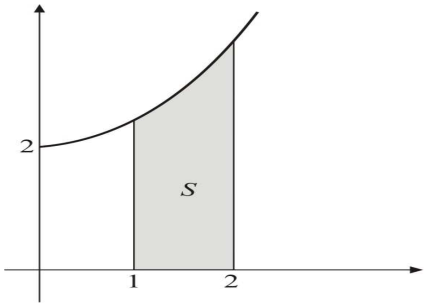


Figura 1.17

Observação: Em alguns casos $x = a$ e/ou $x = b$ precisam ser determinados.

Exemplo 1.39. Encontre a área da região S limitada pelo eixo x e pela parábola $y = x^2 + x - 2$.

Solução. A parábola $y = x^2 + x - 2$ corta o eixo dos x nos pontos $x = -2$ e $x = 1$, (ver Figura 1.18).

$$Área\ S = -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right] \Bigg|_{-2}^{1}$$
$$= -\left(-\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{2}\ u.a.$$

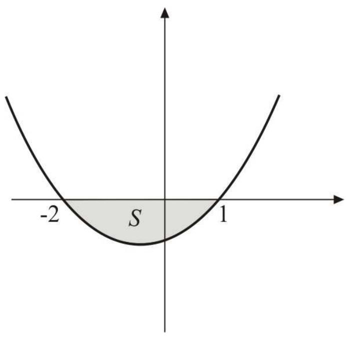


Figura 1.18

Exemplo 1.40. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + 2$, e pela curva $x = \sqrt{y}$.

Solução. As curvas $y = -x + 2$ e $x = \sqrt{y}$ interceptam-se no ponto de abscissa 1 (ver Figura 1.19).

$$Área\ S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [-x + 2 - x^2]\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= \frac{1}{3} u.a\ .$$

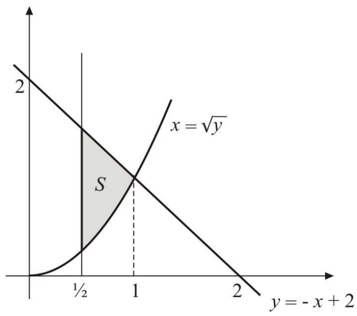


Figura 1.19

Exemplo 1.41. Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -1$ e $x = y^2$.

Solução. A reta $y = x + 2$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa -3. As curvas $y^2 = x$ e $y = 2$ interceptam-se no ponto de abscissa 4. As curvas $y^2 = x$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa 1. A Figura 1.20 indica os pontos de interseção das curvas.

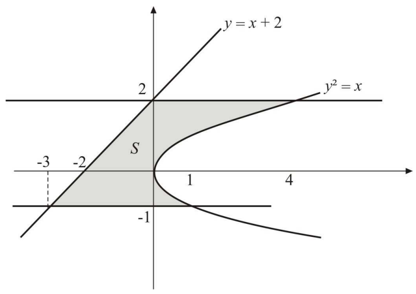


Figura 1.20

$$\text{Área } S = \int_{-3}^{0} [x + 2 - (-1)]\, dx + \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{x})\, dx + \int_{0}^{1} [-\sqrt{x} - (-1)]\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{0} + 3x\Bigg|_{-3}^{0} + 2x\Bigg|_{0}^{4} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1} + x\Bigg|_{0}^{1}$$
$$= \frac{15}{2} u.a\ .$$

Outra maneira para encontrar a área acima, é calcular a integral $\text{Área } S = \int_{-1}^{2} [y^2 - (y - 2)]\, dy$.

1.8.1 Exercícios

1. Esboce a região limitada pelas curvas dadas e encontre a área da região:
   a) $y = x^3$ e $y = x$;
   b) $y = 6 + x$, $y = x^3$ e $y = -\frac{x}{2}$;

c) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ e $y = 0$;

d) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$;

e) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$ e $x = 0$;

f) $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$.

2. Considere a região descrita pelo conjunto S dado, e calcule sua área.

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$;

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ x^3 - x \le y \le -x^2 + 5x\}$.

1.9 Integrais Impróprias

Na definição da integral $\int_a^b f(x)\,dx$, assumimos f uma função limitada no intervalo fechado e limitado $[a,b]$. Agora, vamos estender o conceito de integral para os demais tipos de intervalos. Isto é, para intervalos da forma $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ e $(-\infty,\infty)$.

Definição 1.6. (Integrais Impróprias em Intervalos Limitados)

a) Seja $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo t em (a,b). Se $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ existir então este limite é chamado integral imprópria de f no intervalo $[a,b)$, e escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$.

b) Seja $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t,b]$, para todo t em (a,b). Definimos a integral imprópria de f no intervalo $(a,b]$ como sendo $\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$, se este limite existir, e escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$.

c) Sejam $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in (a,b)$. Se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ existem então definimos a integral imprópria de f em (a,b) por $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Observações:

a) Com a notação do item (c) da definição acima pode-se provar que, se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ existem para algum $c \in (a,b)$, então $\int_a^\lambda f(x)\,dx$ e $\int_\lambda^b f(x)\,dx$ existem para todo $\lambda \in (a,b)$. Logo, pela contra-positiva, para mostrar que $\int_a^b f(x)\,dx$ não existe, basta encontrar um ponto $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ não exista.

b) Costuma-se chamar a expressão $\int_a^b f(x)\,dx$ de integral, mesmo que o domínio da f seja $[a,b)$, $(a,b]$ ou (a,b). E escreve-se a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ igual ao limite correspondente, mesmo antes de calcular o limite. Deixando subentendido que a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ só existe quando o limite correspondente existe. Por exemplo, se f está definida em $[a,b)$ escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$, mesmo antes de calcular o limite.

Quando a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe dizemos que esta integral é *convergente*. Caso contrário, dizemos que é *divergente*.

Exemplo 1.42. Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$;

b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, onde $p>0$.

Solução.

a) A função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ é contínua em $[0,t]$ para $0<t<2$. Logo, f é integrável em $[0,t]$ para todo $t\in(0,2)$. Da Definição 1.6 temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 2^-} -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to 2^-}(-2\sqrt{2-t}+2\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to 2^-}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\sqrt{2}$, a integral $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ é convergente.

b) A função $f(x)=\frac{1}{x}$ é contínua em $[t,1]$ para todo $0<t<1$. Logo, f é integrável em $[t,1]$ para todo $0<t<1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{t\to 0^+} \ln x\,\Big|_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln 1-\ln t\right] = +\infty.\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx$ não existe, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

c) A função $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ é contínua em $[t,1]$ para todo $t\in(0,1)$. Note que para $p=1$ a integral é $\int_0^1 \dfrac{1}{x}dx$, que é divergente (item (b)).

Vamos analisar a convergência da integral para $p\neq 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-p}dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{t^{-p+1}}{1-p}\right).\end{aligned}$$

Se $p>1$ então $-p+1<0$, e quando $t\to 0^+$ temos $t^{-p+1}\to+\infty$. Segue que

$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \dfrac{1}{x^p}dx$ não existe. Logo, a integral $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}dx$ com $p>1$ é divergente.

Se $0<p<1$ então $-p+1>0$, e quando $t\to 0^+$ temos $t^{-p+1}\to 0$. Logo,

$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \dfrac{1}{x^p}dx=\dfrac{1}{1-p}$, isto é, a integral $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}dx$ é convergente.

Portanto, a integral $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}dx$ é convergente para $0<p<1$ e divergente para $p\geq 1$.

Exemplo 1.43. Avalie a integral $\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Solução. A função $f(x)=x\ln x$ não está definida na origem, e é contínua em $[t,1]$ para todo $0<t<1$. Assim,

$$\int_0^1 x\ln x\,dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\ln x\,dx.$$

Para obter $\int_t^1 x\ln x\,dx$ vamos usar integração por partes. Fazendo

$u=\ln x$ e $dv=x\,dx$ obtemos

$du=\dfrac{1}{x}dx$ e $v=\dfrac{x^2}{2}$.

Temos,

$$\begin{aligned}\int_t^1 x\ln x\,dx &= \left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_t^1-\frac{1}{2}\int_t^1 x\,dx\\ &= -\frac{t^2}{2}\ln t-\left.\frac{1}{4}x^2\right|_t^1\\ &= -\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{1}{4}+\frac{t^2}{4}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^1 x\ln x\,dx=\lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{1}{4}+\frac{t^2}{4}\right].$$

Vamos usar a Regra de L' Hospital para calcular o limite do primeiro termo.

$$\lim_{t\to 0^+} -\frac{t^2}{2}\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln t}{\dfrac{2}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{t}}{\dfrac{-4}{t^3}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{4} = 0.$$

Portanto, $\int_0^1 x\ln x\,dx = -\dfrac{1}{4}$.

Exemplo 1.44. Calcule a integral $\int_{-1}^1 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solução. A função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ está definida em $(-1,1)$, e é contínua nos intervalos $[t,0]$ para todo $-1 < t < 0$ e $[0,s]$ para todo $0 < s < 1$. Assim,

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

desde que as integrais do segundo membro sejam convergentes. Vamos calcular

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to -1^+} \int_t^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para obter $\int_t^0 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, aplicaremos o método da substituição. Fazendo

$u = 1-x^2$, obtemos $du = -2xdx$.

Assim,

$$\int_t^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{-1}{2}\int_{1-t^2}^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\sqrt{u}\Big|_{1-t^2}^1$$

$$= -1 + \sqrt{1-t^2}.$$

Logo,

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to -1^+}\left[-1+\sqrt{1-t^2}\right]$$

$$= -1.$$

Agora,

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$= \lim_{t\to 1^-} -\sqrt{u}\Big|_1^{1-t^2}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[-\sqrt{1-t^2}+1\right]$$

$$= 1.$$

Portanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -1+1 = 0.$$

Exemplo 1.45. Calcule a integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

Solução. A função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ está definida em $(-1,1)$, e é contínua nos intervalos $[t,0]$ para todo $-1<t<0$ e $[0,s]$ para todo $0<s<1$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx,$$

desde que as integrais do segundo membro sejam convergentes. Calcularemos

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx.$$

A função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{t}^{0} \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int_{t}^{0} \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_{t}^{0} - \frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_{t}^{0} \\ &= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|.\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \lim_{t\to -1^+}\left[-\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|\right] \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Como a integral $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ é divergente, concluímos que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ é divergente.

Se a integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ existir e f é não negativa no seu domínio $[a,b)$, $(a,b]$ ou (a,b) então esta integral pode ser interpretada como a área da região S do plano ilimitada sob gráfico de f e acima do eixo x, e entre retas $x=a$ e $x=b$ (ver Figura 1.21).

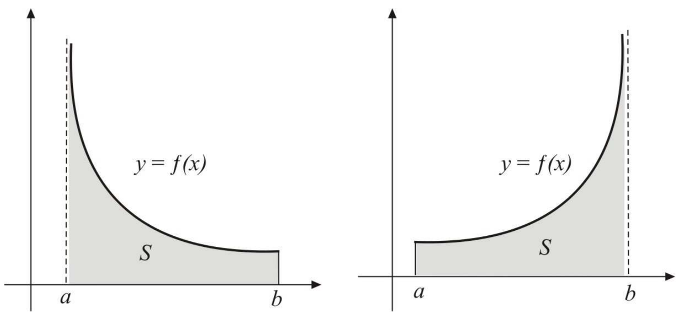


Figura 1.21

Definição 1.7. (Integrais Impróprias em Intervalos Ilimitados)

a) *Seja* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a,t]$, *para todo* $t>a$. *Se* $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ *existir, então este limite é chamado de integral imprópria de* f *no intervalo* $[a,+\infty)$. *Neste caso usamos a notação* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$.

Analogamente, se $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ *é uma função integrável em* $[t,b]$ *para todo* $t<b$, *definimos a integral imprópria de* f *em* $(-\infty,b]$ *por* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$, *quando o limite existir.*

b) *Seja* $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *uma função. Se para algum* $c\in(a,+\infty)$ *existirem* $\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$, *definimos a integral imprópria de* f *em* $(a,+\infty)$ *por* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$.

De forma análoga definimos as integrais impróprias para funções definidas em intervalos da forma $(-\infty,b)$ *e* $(-\infty,+\infty)$.

Observações:

a) Costuma-se chamar as expressões $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ de integrais. E escreve-se a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ igual ao limite correspondente, mesmo antes de calcular o limite. Deixando subentendido que a integral só existe quando o limite existe.

b) Com a notação do item (b) da definição acima pode-se provar que, se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ existem para algum $c\in(a,+\infty)$, então $\int_a^{\lambda} f(x)\,dx$ e $\int_{\lambda}^{+\infty} f(x)\,dx$ existem para todo $\lambda\in(a,+\infty)$. O mesmo vale para integrais definidas em $(-\infty,b)$ e $(-\infty,+\infty)$.

Quando a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe dizemos que esta integral é convergente. Caso contrário, dizemos que é divergente. O mesmo vale para as integrais $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exemplo 1.46. Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$;

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, onde $p > 0$.

Solução.
a) Da Definição 1.7 temos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx\\ &= \lim_{t\to+\infty} -e^{-x}\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+e^0)\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^t}+1\right]\\ &= 1.\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx = 1$, a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ é convergente.

b) $$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{t\to+\infty} \ln x\Big|_1^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}[\ln t - \ln 1]\\ &= \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty .\end{aligned}$$

Como o limite não existe, a integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ é divergente.

c) Para analisar a convergência da integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$, estudaremos os casos em que $p=1$ e $p \neq 1$.

Se $p=1$ então a integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ é divergente (item (b)).

Para $p \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-p}dx\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right].\end{aligned}$$

Se $p>1$ então $1-p<0$, e quando $t\to+\infty$ temos $t^{1-p}\to 0$. Logo,

$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}$, isto é, a integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ com $p>1$ é convergente.

Se $0<p<1$ então $1-p>0$, e quando $t\to+\infty$ temos $t^{1-p}\to+\infty$. Neste caso,

$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-p}dx$ não existe, e assim a integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ com $p<1$ é divergente.

Portanto, a integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ é convergente para $p>1$ e divergente para $0<p\leq 1$.

Exemplo 1.47. Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Da Definição 1.7 temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx .$$

Para calcular a integral $\int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$ aplicaremos a integração por partes. Fazendo

$u = e^{-x}$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, obtemos

$du = -e^{-x} dx$ e $v = -\cos x$.

Assim,

$$\int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{-x} \cos x \Big|_0^t - \int_0^t e^{-x} \cos x \, dx .$$

Para calcular $\int_0^t e^{-x} \cos x \, dx$, aplicamos novamente a integração por partes. Fazendo

$u = e^{-x}$ e $dv = \cos x \, dx$, obtemos

$du = -e^{-x} dx$ e $v = \operatorname{sen} x$.

Logo,

$$\int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = (-e^{-t} \cos t + \cos 0) - \left[e^{-x} \operatorname{sen} x \Big|_0^t + \int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \right]$$

ou seja,

$$\int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2}[-e^{-t} \cos t + 1 - e^{-t} \operatorname{sen} t] .$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos t}{e^t} + 1 - \frac{\operatorname{sen} t}{e^t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} .$$

(Note que $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ são limitadas e quando $\frac{1}{e^t} \to 0$ quando $t \to +\infty$)

Exemplo 1.48. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx$.

Solução. Podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx ,$$

desde que ambas as integrais do segundo membro sejam convergentes. Calculando,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+9} dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}\Big|_0^t$$

(Seção 1.7.2 – Exercício 4)

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} 0 \right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6} .$$

De forma análoga, mostra-se que $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9} = \frac{\pi}{6}$.

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{3}$.

Observação: Qualquer uma das integrais impróprias definidas acima, pode ser interpretada como uma área, desde que a função seja não-negativa e a integral convergente. Por exemplo, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$ e a integral $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ existe, então definimos a área da região correspondente $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ como sendo $\acute{A}rea\ S = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

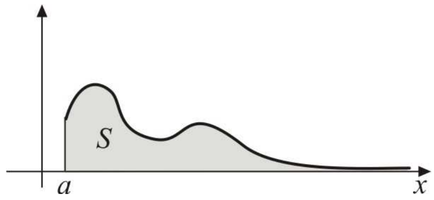


Figura 1.22

Exemplo 1.49. Esboce a região correspondente $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$, e determine a área de S.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.23.

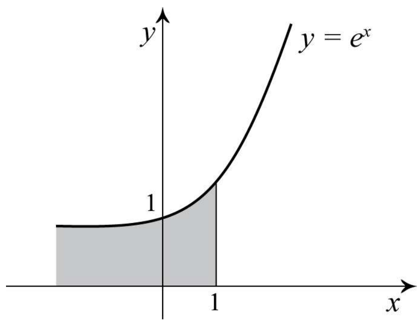


Figura 1.23

$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea\, S &= \int_{-\infty}^{1} e^x dx \\
&= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{1} e^x dx \\
&= \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_{t}^{1} \\
&= \lim_{t \to -\infty} \left(e - e^t\right) \\
&= e\ u.a.
\end{aligned}
$$

Em algumas situações estamos interessados somente em saber se a integral é convergente ou divergente. O próximo resultado (Critério da Comparação) permite afirmar a convergência ou divergência de uma integral comparando-a com outra. A demonstração será omitida.

Teorema 1.13. (Critério da Comparação) *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções tais que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in I$, onde I é um intervalo da forma $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ ou $(-\infty,+\infty)$.*

a) Se a integral de g em I é convergente então a integral de f em I é convergente;
b) Se a integral de f em I é divergente então a integral de g em I é divergente.

Note que item (b) no teorema acima é a contra-positiva do item (a).

Observações:

a) O Critério da Comparação pode ser aplicado quando $f(x)$ e $g(x)$ são ambas não positivas. Sejam f e g funções tais que $f(x) \le g(x) \le 0$ para todo $x \in I$ (I é um dos intervalos acima).
   (i) Se a integral de f em I converge então a integral de g em I converge.
   (ii) Se a integral de g em I diverge então a integral de f em I diverge.

b) No Critério da Comparação, a hipótese de $f(x)$ e $g(x)$ serem ambas não negativas (ou não positivas) é essencial. Se esta hipótese é removida podemos ter problema. Vejamos:
   Considere as funções $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ e $g(x) = 1$. Temos

$$g(x) \ge f(x), \text{ pois } f(x) \le 0 \text{ para todo } x \in (0,1].$$

Calculando

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 dx = \lim_{t\to 0^+} x\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} (1-t) = 1,$$

e

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{-1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} -\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} -\ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -\left(\ln 1 - \ln|t|\right) = -\infty.$$

Logo,

$$\int_0^1 g(x)\,dx \text{ converge, mas } \int_0^1 f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.50. Verifique que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ é convergente.

Solução. Temos que

$$x^4 < x^4 + 1 \text{ para } x \ge 1.$$

Segue que

$$\frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4} \text{ para } x \ge 1.$$

Multiplicado por x a desigualdade acima temos,

$$0 < \frac{x}{x^4+1} < \frac{1}{x^3} \text{ para } x \ge 1.$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ é convergente (Exemplo 1.46), segue pelo Critério da Comparação que a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ é convergente.

Exemplo 1.51. Mostre que a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente.

Solução. Para $x \geq 1$ temos

$$1+e^{-x} > 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} > 0 .$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente, segue pelo Critério da Comparação que a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente.

Exemplo 1.52. Verifique que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+9}\,dx$ é convergente.

Solução. Para $x \geq 0$ temos $\cos^2 x \leq 1$. Podemos escrever

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2+9} \leq \frac{1}{x^2+9} \text{ para todo } x \geq 0 .$$

Como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,dx$ é convergente (Exemplo 1.48) segue, pelo Critério da Comparação, que a integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+9}\,dx$ é convergente.

Exemplo 1.53. Aplique o Critério da Comparação para verificar que $\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente.

Solução. Para $0 < x \leq 1$ temos $0 < e^x \leq e$. Segue que

$$0 < \frac{e^x}{\sqrt{x}} \leq \frac{e}{\sqrt{x}} \text{ para } 0 < x \leq 1 .$$

Como $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente, temos $\int_0^{1} \frac{e}{\sqrt{x}}\,dx$ também é convergente. Logo, $\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente.

1.9.1 Exercícios

1. Verifique se a integral é convergente ou divergente, e avalie aquelas que são convergentes.

   a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$;

   b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4t^2}\,dt$;

   c) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$;

   d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$, ($a > 0$);

   e) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$;

   f) $\int_0^{1} \ln z\,dz$;

   g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx$;

   h) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx$.

2. Use o critério da comparação para determinar se a integral é convergente.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\left(1+e^x\right)}$; b) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$;

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x}dx$; d) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}dx$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}dx$; f) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx$.

3. Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$, a transformada de Laplace de f é a função F definida por $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$, e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = 1$; b) $f(t) = \cos t$; c) $f(t) = e^{at}$; d) $f(t) = t$.

1.10 Utilização de Pacotes Computacionais

Softwares de Computação Numérica permitem ao usuário executar, com alguns comandos simples, uma quantidade de operações que seria inviável de ser feita manualmente. Existem diversos pacotes comerciais específicos para o cálculo numérico. Um dos mais populares é o MATLAB: praticamente onipresente nos meios científicos. Diversos "clones" do Matlab, com licenças código livre, foram desenvolvidos nos últimos anos. Dentre eles podemos citar o Octave.

O Octave foi concebido aproximadamente em 1988 para servir de referência para uma apostila de um curso de Projetos de Reatores Químicos, que estava sendo escrito por James B. Rawlings, da Universidade de Wisconsin-Madison e de John G. Ekerdt da Universidade do Texas. Atualmente o Octave é utilizado de maneira mais ampla que a planejada de início, estando presente tanto no meio acadêmico como em aplicações comerciais.

As sintaxes do MATLAB e do Octave são muito semelhantes assim como suas funcionalidades.

Os computadores são ferramentas essencialmente numéricas, desta forma, as principais linguagens de programação são maneiras elaboradas de ensinar ao computador como manipular quantidades de modo a transformá-las em outras quantidades. Apesar de padrão, o processamento numérico não é a única funcionalidade dos computadores atuais, de fato, em 1844, Lady Lovelace[8] previu a possibilidade de uma máquina manipular símbolos. No entanto, só em 1953 conseguiu-se construir um sistema que realizasse cálculos algébricos simples.

A manipulação simbólica em computadores modernos é, atualmente, bastante corriqueira e estamos acostumados a manipular toda sorte de informação simbólica (nomes, datas, textos...) nos mais diferentes contextos. A idéia central da denominada Computação Algébrica ou simbólica é manipular símbolos matemáticos diretamente de forma a fornecer respostas algébricas para problemas algébricos.

O pacote Gnu/Maxima é um software livre para cálculos matemáticos, com sintaxe semelhante à do software Mathematica. Ambos podem ser utilizados para a manipulação de expressões simbólicas, incluindo integração, diferenciação, resolução algébrica de sistemas de equações lineares e não-lineares além de manipulação de vetores e matrizes. O Maxima[9] produz resultados precisos e pode exibir graficamente funções e dados em duas ou três dimensões.

---

[8] Entrou para a história como a primeira mulher programadora, onde criou um algoritmo para o cálculo da Seqüência de Bernoulli usando a máquina analítica de Charles Babbage.

[9] Tanto o Octave como o Maxima podem ser baixados gratuitamente em http://sourceforge.net/.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos das potencialidades do Maxima[10] no cálculo integral e diferencial.

Exemplo 1.54. Calcular $\int_1^5 (3x+4)\,dx$.

Solução. Podemos resolver esta integral através do cálculo da área delimitada pelas curvas dadas por $f(x)=3x+4$, $x=1$, $x=5$ e pelo eixo-x. Para facilitar, podemos desenhar o gráfico da respectiva região (Figura 1.21). Para isso, podemos usar o seguinte comando do pacote computacional Maxima:

plot2d(3*x + 4, [x, 1, 5])

onde o primeiro argumento representa a função e o segundo argumento se divide em três partes: a variável independente e os extremos inferior e superior do intervalo onde a função deve ser representada.

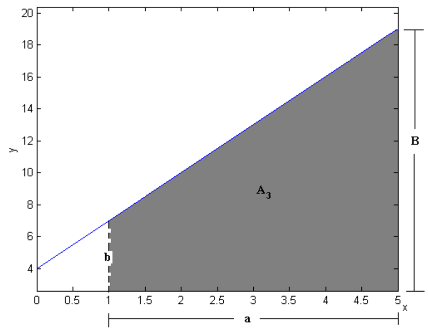


Figura 1.21**:** Esboço do gráfico de $f(x)=3x+4$ e determinação de área no intervalo [1,5].

Sabemos que a região hachurada no gráfico é um trapézio cuja área é dada por $\frac{(B+b).a}{2}=\frac{(19+7).4}{2}=52\,u.a.$ Tal integral definida também pode ser calculada através do comando

integrate(3*x + 4, x,1, 5)

onde o primeiro argumento representa a função a ser integrada, o segundo representa a variável de integração e os dois últimos representam os extremos inferior e superior do intervalo de integração.

Exemplo 1.55. Encontrar a primitiva das integrais abaixo, utilizando o Maxima:
a) $F(x)=\int 2x\,dx$; b) $F(x)=\int 3e^{3x}\,dx$; c) $F(x)=\int \text{sen}(x)\,dx$; d) $F(x)=\int x^4 dx$.

Solução. Em todos os itens, pode utilizar o comando

integrate(f(x), x).

Repare que agora ele só tem dois argumentos: o primeiro que deve ser trocado pela respectiva função a ser integrada e o segundo que representa a variável de integração. Em a) temos o comando **integrate(2x,x)**, em b) **integrate(3*exp(3*x),x)**, em c) **integrate(sin(x),x)** e em d) **integrate(x^4,x)**. Ao realizar esses testes, note que aos resultados podem ser adicionadas constantes de integração para representar toda a família de primitivas.

[10] Maiores detalhes sobre o uso do software podem ser encontrados em http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/pt/maxima.html.

Exemplo 1.56. Calcular a área definida pelo gráfico da curva $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, em [0,1].

Solução. O gráfico da respectiva região (Figura 1.22) pode ser obtido através do comando **plot2d(x/(x^2+1)^(1/2), [x, 0, 1])**.

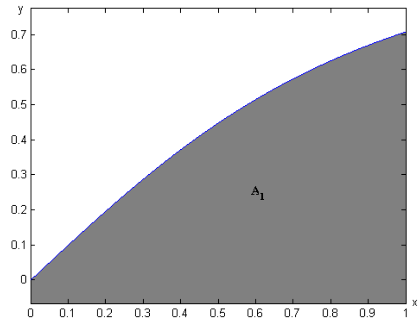


Figura 1.22**:** Esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e determinação de área no intervalo [0,1].

A área definida pelo gráfico da função f, no intervalo especificado, pode ser calculada através da integral $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ que o software Maxima pode calcular usando o comando **integrate(x/(x^2+1)^(1/2) , x,0, 1)**, resultando $\sqrt{2}-1\,u.a.$ Para obtermos somente a primitiva $\sqrt{x^2+1}$, podemos usar o comando **integrate(x/(x^2+1)^(1/2) , x)**.

Exemplo 1.57. Calcular a área delimitada pelo gráfico das curvas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

Solução. Para esboçar os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de eixos coordenados, entre $x = -0,5$ e $x = 1,5$ (Figura 1.23), utilizamos o comando

plot2d([x^2, 2*x-x^2] , [x, -0.5, 1.5])

onde o primeiro argumento se divide em duas partes representando cada uma das funções e o segundo argumento se divide em três partes: a variável independente e os extremos inferior e superior do intervalo onde a função deve ser representada.

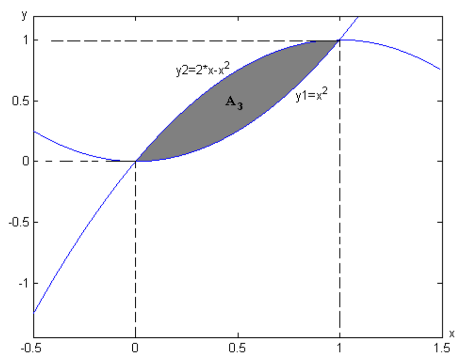


Figura 1.23: Esboço dos gráficos de $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2x - x^2$ e determinação de área em $[0,1]$.

As abscissas dos pontos onde as duas curvas se interceptam são 0 e 1. Assim, a área definida pelo gráfico pode ser calculada através da integral $\int_0^1 (2x - x^2) - x^2 dx$, usando **integrate(2*x, x,0, 1)**, que resulta em $\frac{1}{3} u.a$.

Exemplo 1.58. Calcular $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Solução. Neste caso, trata-se de uma integral imprópria: $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} F(b)$. Vamos calcular a primitiva utilizando o comando **integrate(exp(-x), x,0,b)** que resulta em $F(b) = -e^{-b} + 1$. Em seguida calculamos o respectivo limite no infinito através de

limit (-exp(-b)+1, b, inf)

onde o primeiro argumento representa a função F, o segundo representa a variável independente b e o último representa para onde tende tal variável. Nesse caso, obtemos o resultado 1.

Exemplo 1.59. Calcular $\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$.

Solução. Agora, temos que calcular $\lim_{b \to -\infty} \int_b^0 e^{-x} dx = \lim_{b \to -\infty} F(b)$. O comando **integrate(exp(-x), x,b,0)** resulta em $\mathrm{F(b)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{b}} - 1$ enquanto o limite calculado por **limit (exp(-b)-1, b, -inf)** resulta $+\infty$, indicado pelo software por **inf**, mostrando que a integral é divergente.

Exercícios de Fixação

1. Calcule a integral $\int_2^2 e^{-x^2} dx$.

2. Mostre que se f é contínua em $[-1,3]$ então
$$\int_{-1}^{3} f(x) dx + \int_{3}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) dx + \int_{1}^{-1} f(x) dx = 0.$$

3. Considere a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\frac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$.

   A função f é integrável em $[-1,1]$? Justifique.

4. Considere as integrais $\int_0^2 f(t)\, dt = 3$, $\int_0^5 f(s)\, ds = 8$ e $\int_3^5 f(u)\, du = -1$.

Encontre $\int_2^3 f(x)\,dx$.

5. Se f é contínua em $[a,b]$, mostre que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

   Sugestão: Use $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e Teorema 1.8.

6. Encontre uma função f tal que $f'(x)-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=0$ e $f(1)=1$.

7. Seja f função contínua em $[-a,a]$. Mostre que:

   a) Se f é função par então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

   b) Se f é função ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

8. Use o Exercício 7 acima para mostrar que, se $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua então $\int_{-1}^{1} x\, f(x^2)\,dx = 0$.

9. Mostre que se $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua então $\int_0^{\pi} g(sen\, x)\cdot\cos x\,dx = 0$.

10. Encontre a derivada da função $G(x)=\int_2^{x^3}\cos t\,dt$.

    Sugestão: Faça $u=x^3$ e use a Regra de Cadeia.

11. Verifique por diferenciação que a fórmula está correta.

    a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = 2\sqrt{x-2}-\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}+c$;

    b) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c$;

    c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{1}{6}x\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|+c$.

12. Calcule as integrais indefinidas:

    a) $\displaystyle\int (x^2+\operatorname{sen} x)\,dx$;

    b) $\displaystyle\int \frac{x^4-3\sqrt[3]{x}+2}{x}$;

    c) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$;

    d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$,

    Sugestão: dividir x^2 por (x^2+1);

    e) $\displaystyle\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2x+\cos x}dx$;

    f) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$;

    g) $\displaystyle\int \frac{e^{\cos x}}{\operatorname{cossec} x}dx$;

    h) $\displaystyle\int \cos x\cdot\operatorname{sen}(sen\, x)dx$;

i) $\int \frac{(x-1)}{x^2-2x+5}\,dx$;

j) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$,
Sugestão: completar o quadrado;

k) $\int (x+\sec^2 5x)\,dx$;

l) $\int \cos^2 x\,dx$,
Sugestão: use $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

m) $\int \log x\,dx$;

n) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,dx$;

o) $\int e^{2x}\cdot \operatorname{sen} 3x\,dx$;

p) $\int x^2 \cdot \cos x\,dx$;

q) $\int x^2 \cdot e^x dx$;

r) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$.

13. Sabendo que $f(0)=g(0)$, mostre que

$$\int_0^a f(x)\,g''(x)\,dx = f(a)\,g'(a) - f'(a)\,g(a) + \int_0^a f''(x)\,g(x)\,dx.$$

14. Considere a função $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & se\ |x|\le 1 \\ 2^x, & se\ 1<x\le 2 \end{cases}$. Determine $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

15. Calcule as integrais definidas:

a) $\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$;

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$;

c) $\int_1^2 \ln x\,dx$;

d) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \operatorname{sen}^5 x\,dx$

f) $\int_{-2}^{3} |x^2-1|\,dx$;

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x\,dx$;

h) $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + |\cos x|)\,dx$.

16. Use integração por partes para mostrar as fórmulas de redução.

a) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$.

b) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$.

17. Calcule a área entre as curvas $y=x^2$ e $y=x^3$.

18. Calcule a área entre a curva $y=(x+1)(x-1)(x+2)$ e o eixo dos x.

19. Calcule a área entre as curvas $x=y+1$ e $x=\frac{y^2}{2}-3$.

20. Esboce a região limitada pelas curvas dadas e encontre a área da região.

a) $y=x+6$, $y=x^3$ e $y=-x$;

b) $x=y^2-2$, $x=e^y$, $y=1$ e $y=-1$.

21. Determine a área da região limitada pelos gráficos de $y=\sec x$, $y=x$, $x=-\frac{\pi}{4}$ e $x=\frac{\pi}{4}$.

22. Verifique se a integral é convergente ou divergente, e avalie aquelas que são convergentes.

a) $\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x\, dx$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

c) $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x}\, dx$; d) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^4}\, dx$.

23. Use o critério da comparação para determinar se a integral é convergente.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^3}\, dx$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+10}\, dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\, dx$.

24. a) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ é divergente.

b) Verifique que $\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{+t} x\, dx = 0$. Note que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \neq \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x\, dx$.

RESUMO

Os principais assuntos estudados neste capítulo foram:

- A definição de integral e suas propriedades;
- O Teorema Fundamental do Cálculo;
- Método da Substituição;
- Método da Integração por Partes;
- Aplicação da integral definida no cálculo de área;
- As definições de Integrais Impróprias. É importante saber calcular limite de funções.