As funções exponencial e logarítmica

1. Potências em $\mathbb{R}$

Seja a um número real positivo, isto é, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n , de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais ao número real a:

$$a^n = \underbrace{a.a. \dots .a}_{n-\text{ vezes}}$$

Para $n = 1$, estabelece-se $a^1 = a$, por definição. Também por definição tem-se $a^0 = 1$.

Decorrem da definição as seguintes propriedades (já provadas para $a \in \mathbb{Q}$):

P1) $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tem-se $a^{n+m} = a^n.a^m$

Esta propriedade pode ser estendida para expoentes $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \in \mathbb{N}$:

$$a^{m_1+m_2+m_3+\dots+m_k} = a^{m_1}.a^{m_2}.a^{m_3}. \dots a^{m_k}$$

P2) $\forall\, m, k \in \mathbb{N}$ tem-se $(a^m)^k = a^{m.k}$

Esta propriedade pode ser vista como um caso particular da propriedade1 para expoentes $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k \in \mathbb{N}$.

P3) Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Se $a > 1$, então $1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots$

Se $0 < a < 1$, então $1 > a > a^2 > a^3 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots$

Em outras palavras, esta propriedade diz que a seqüência das potências do número positivo a é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $a < 1$. A demonstração pode ser feita multiplicando ambos os membros das desigualdades $a > 1$ e $a < 1$ pelo número positivo a^n .

Potências de expoente negativo

Quando $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, então a^{-n} é definido como $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Ficam assim definidas as potências inteiras de um número positivo.

Exemplos

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

2) $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Potências de expoente racional

Quando $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, $a^{\frac{p}{q}}$ é definido como $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Se $p < 0$ fazemos $a^{\frac{p}{q}} = \left[(a)^{\frac{1}{q}}\right]^p$ e utilizamos a definição de potência inteira negativa.

Exemplos

3) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}$

5) $2^{\frac{-3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Podemos também utilizar a definição de potência negativa diretamente e fazer:

$$2^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Observação 1. Fixado o número real positivo *a*, com $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$. Por exemplo, se fixamos $a = 3$ e escolhemos o intervalo $(0,1)$, o número real $3^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pertence ao intervalo $(0,1)$. A demonstração deste fato será feita na disciplina de Introdução à Análise.

Pergunta: para $a \in \mathbb{R}_+^*$, como definir a^k para *k* um número irracional?

Como foi estudado no Capítulo 2, podemos aproximar um número irracional por uma seqüência de números racionais. Esta idéia, que envolve o conceito de limite e será detalhada na disciplina de Cálculo I, permite-nos definir as potências de expoente irracional.

Tomemos como exemplo o número $4^{\sqrt{2}}$. A seqüência 1 , 1,4 , 1,41 , 1,414 , 1,4142 , ... fornece aproximações cada vez mais próximas de $\sqrt{2}$. Logo, a seqüência $4^{1}, 4^{1,4}, 4^{1,41}, 4^{1,414}, 4^{1,4142}, \ldots$ fornece aproximações cada vez melhores de $4^{\sqrt{2}}$. Com a noção de limite, este número pode ser definido precisamente. Por ora, basta-nos saber que ele existe e pode ser calculado. Com isso podemos concluir que as propriedades das potências continuam valendo também para expoentes que são números reais:

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$ tem-se

(i) $a^{x}.a^{y} = a^{x+y}$

(ii) $\left(a^{x}\right)^{y} = a^{x.y}$

(iii) $\left(a.b\right)^{x} = a^{x}.b^{x}$

2. A função exponencial

Seja a um número real positivo e diferente de 1. A função exponencial de base a é definida como $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^{x}$.

Observação 2. O domínio e o contradomínio da função exponencial é o conjunto $\mathbb{R}$. A imagem da função é $\mathbb{R}_{+}$.

Observação 3. Consideramos a base a diferente de 1 pois caso contrário teríamos a função constante $f(x) = 1^{x} = 1$, para todo número real x.

Exemplos:

6) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

Alguns valores de f são:

$f(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0} = 1$, $f(-1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

7) $f(x) = 3^{x}$

Calcule você os valores $f(5), f(-2), f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Propriedades da função exponencial

As propriedades a seguir serão muito úteis na resolução de problemas que envolvem a função exponencial, assim como na resolução de equações exponenciais. Algumas serão justificadas, outras serão demonstradas em disciplinas posteriores. Consideraremos sempre que a base *a* é um número real positivo e diferente de 1, e que *f* é a função $f(x) = a^x$.

FE1) $f(x+y) = f(x).f(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Justificativa: $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

FE2) *f* é uma função crescente para $a > 1$.

FE3) *f* é uma função decrescente para $a < 1$.

FE4) $f(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Justificativa: inicialmente vamos mostrar que $f(x) \neq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (faremos por contradição). Suponhamos que exista um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. Então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) = f(x+0) = f(x + (x_0 - x_0)) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0$$

Assim, temos $f(x) = 0$ **para todo** x **real**, o que é uma contradição pois $f(1) = a^1 = a \neq 0$ (lembre-se que *a* é positivo). Logo, tal x_0 não existe e temos $f(x) \neq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1).

Agora vamos mostrar que $f(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$:

Seja $x \in \mathbb{R}$ (x um número real qualquer). Então

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$, pois $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ por (1).

Logo, podemos concluir que $f(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Observação 4 : A propriedade 4 nos diz que $\operatorname{Im} f \subset (0, +\infty)$, uma vez que os valores de *f*(*x*) são positivos. É possível provar também que $(0, +\infty) \subset \operatorname{Im} f$, isto é, todo número positivo é alguma potência real do número *a*. Logo, podemos concluir que $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$.

FE5) $f(kx) = [f(x)]^k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{R}$.

Justificativa: para todos $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ temos

$$f(kx) = a^{kx} = \left(a^x\right)^k = [\,f(x)]^k$$

FE6) *f* é injetora.

Justificativa: provaremos que para quaisquer x e y reais, se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$.

De fato: sejam x e y reais tais que $x \neq y$. Podemos supor sem perda de generalidade que $x < y$ (algo muda se supusermos $y < x$? Experimente!). Vamos estudar os dois casos, para $a > 1$ e para $a < 1$:

(i) para $a > 1$ temos pela propriedade 2 que f é crescente, isto é, $f(x) < f(y)$. Logo, temos $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora.

(ii) para $a < 1$ temos pela propriedade 3 que f é decrescente, isto é, $f(x) > f(y)$. Logo, também temos $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora.

Observação 5: da Observação 4 e da propriedade 6 podemos concluir que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (0,+\infty) \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

é uma função bijetora, e, conseqüentemente, inversível.

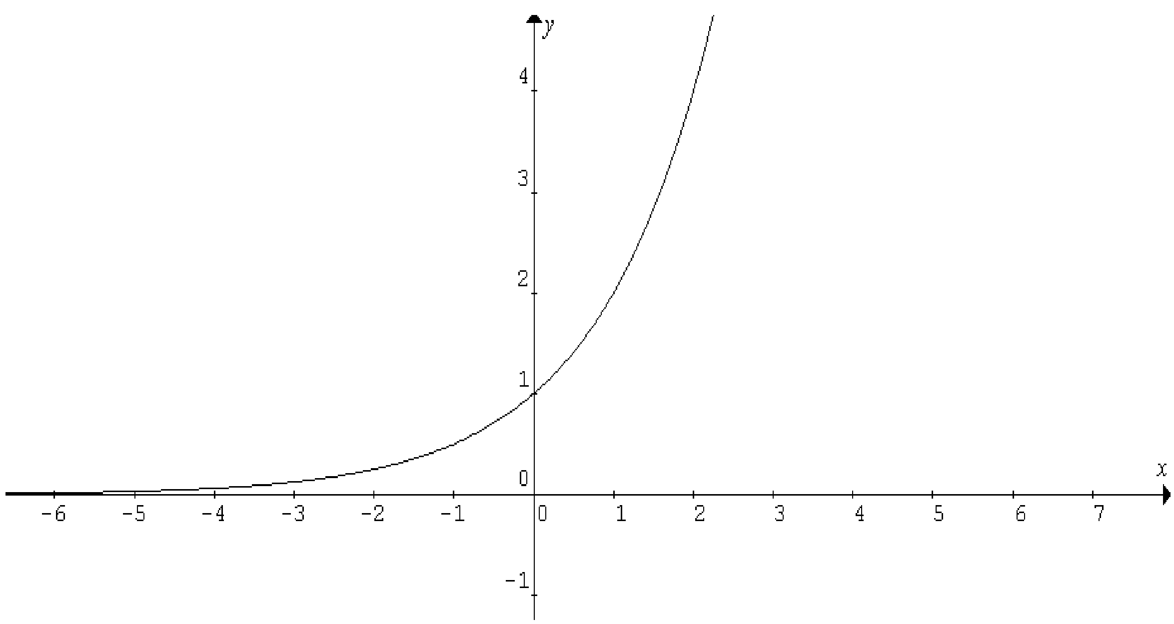
Gráfico da função exponencial

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$.

Devemos distinguir dois casos: quando $a > 1$ e quando $a < 1$. Faremos um exemplo de cada caso.

I) Gráfico de $f(x) = 2^x$

Como a base é maior do que 1, sabemos que f é crescente. Vamos localizar alguns pontos e fazer o gráfico.



Observe que:

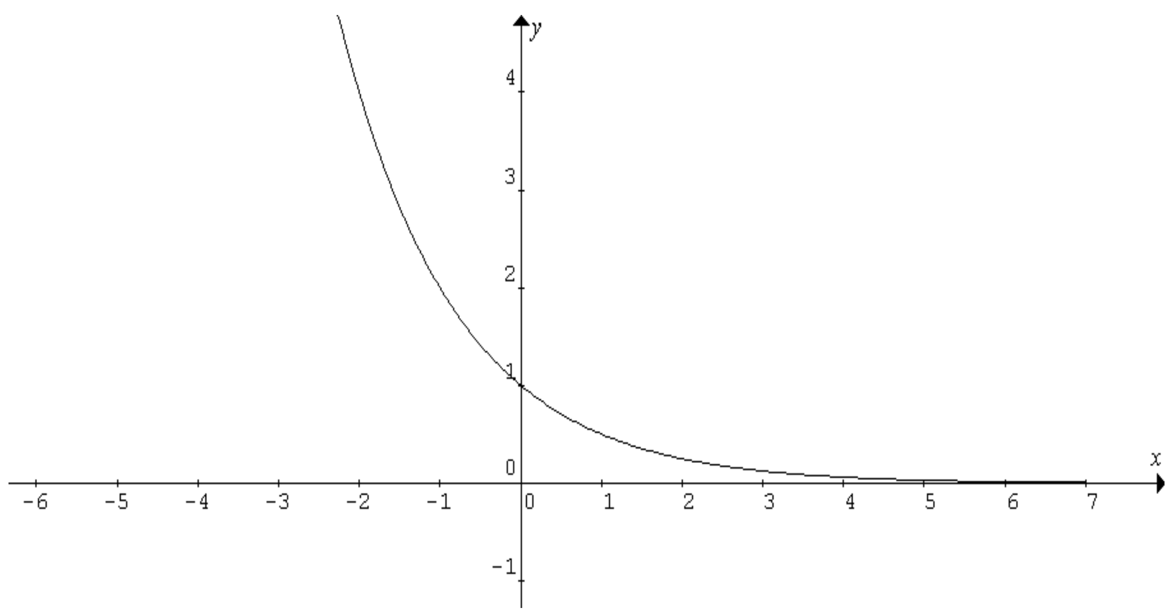
(a) À medida que o valor x aumenta, 2^x também aumenta e seu valor ultrapassa qualquer número real pré-fixado, desde que se tome x suficientemente grande.

(b) À medida que x aumenta em módulo, mas é negativo, 2^x diminui, aproximando-se cada vez mais de zero.

Observação 6: Toda função exponencial de base maior do que 1 tem um gráfico semelhante a este.

II) Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Neste caso a base é menor do que 1 e a função é decrescente.



As observações são análogas às que foram feitas para o caso anterior.

Exercícios propostos

1) Faça o gráfico das funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Sugestão: use calculadora.

Equações exponenciais

Equações exponenciais são equações nas quais a incógnita aparece no expoente, como por exemplo $2^x = 64$ ou $\sqrt{5^{x-2}}.\sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$.

Equações exponenciais com potências de mesma base podem ser resolvidas utilizando as propriedades da função exponencial que acabamos de estudar. Vamos fazer alguns exemplos de resolução.

Exemplos

8) $8^x = 32$

Resolução

Note que 8 e 32 são potências de 2: $8 = 2^3$ e $32 = 2^5$. Então podemos escrever

$\left(2^3\right)^x = 2^5$

Pelas propriedades das potências, temos

$2^{3x} = 2^5$

Podemos olhar para esta equação como imagens iguais da função exponencial *f* de base 2, isto é, $f\left(3x\right) = f\left(5\right)$. Como a função exponencial é injetora, podemos concluir que $3x = 5$, isto é, $x = \frac{5}{3}$. Assim, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

9) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Resolução

Utilizando as propriedades das potências, escrevemos

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4}$

$3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}}$

Também neste caso podemos olhar para esta equação como imagens iguais da função exponencial f de base 3, isto é, $f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$. Como a função exponencial é injetora, podemos concluir que $\frac{x}{2}=\frac{4}{3}$, isto é, $x=\frac{8}{3}$. Assim, o conjunto solução da equação é $S=\left\{\frac{8}{3}\right\}$.

10) $8^{3x}=\dfrac{\sqrt[3]{32^x}}{4^{x-1}}$

Resolução

Note que 8, 32 e 4 são potências de 2; utilizando este fato e as propriedades das potências temos

$$\left(2^3\right)^{3x}=\frac{\sqrt[3]{\left(2^5\right)^x}}{\left(2^2\right)^{x-1}}$$

$$2^{9x}=\frac{\sqrt[3]{2^{5x}}}{2^{2x-2}}$$

$$2^{9x}=\frac{2^{\frac{5x}{3}}}{2^{2x-2}}$$

$$2^{9x}=2^{\left(\frac{5x}{3}-2x+2\right)}$$

Então podemos concluir que

$$9x=\frac{5x}{3}-2x+2$$

$$9x=\frac{5x-6x+6}{3}$$

$$27x=-x+6$$

$$28x=6$$

$$x=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

O conjunto solução da equação é $S=\left\{\frac{3}{14}\right\}$.

11) $4^x - 2^x = 56$

Resolução

Podemos escrever a equação como

$2^{2x} - 2^x - 56 = 0$

$\left(2^x\right)^2 - 2^x - 56 = 0$

Neste caso utilizamos uma “mudança de variável”, recurso que nos permite escrever a equação dada como uma equação já conhecida; fazemos $2^x = y$ (mudamos a variável *x* pela variável $y = 2^x$) e ficamos com a equação $y^2 - y - 56 = 0$.

Resolvendo a equação quadrática obtemos os valores $y = 8$ ou $y = -7$. Observe que $y = -7$ não nos convém pois $y = 2^x > 0$ para qualquer valor *x*. Para $y = 8$ obtemos

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Logo, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

12) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

Resolução

Resolvemos esta equação colocando 2^{x-1} em evidência; escolhemos a potência $x - 1$ por ser a “menor” entre as potências das parcelas (note que as potências estão em ordem crescente!).

$2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) = 120$

$2^{x-1}.15 = 120 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3$

Logo, $x - 1 = 3$ e $x = 4$. O conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

Exercícios propostos

2) Resolva as equações exponenciais:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$ b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x}$ c) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5}$

d) $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0$ e) $x^{x^2-2} = 1$ f) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$

O número e

Existe um número irracional, cuja aproximação até a quinta casa decimal é 2,71828, que é usado tão freqüentemente como base para a função exponencial (e também logarítmica) em aplicações na física, economia, biologia e outras ciências, que merece uma notação especial. É representado pela letra “e”. Ele é o “limite” (você vai aprender os detalhes nas disciplinas de Cálculo) de uma seqüência de números reais dada por $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, no seguinte sentido: para cada valor natural *n* a partir de 1, o número encontrado se aproxima cada vez mais do número e. Veja alguns cálculos para valores crescentes de *n*:

Valores de *n*	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,370370...
4	2,44140625
5	2,48832
10	2,5937424601...
20	2,653297705...
30	2,67431877587...
40	2,685063838383...
50	2,69158802908...
60	2,69597013933...
70	2,69911637098...
80	2,70148494075...
90	2,70333246106...
100	2,70481382942...
110	2,70602808151...
180	2,71076929584...
200	2,71151712294...

À medida que aumentamos os valores *n*, o número $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima cada vez mais do número irracional 2,71828182846... Faça o gráfico da função $f(x) = e^x$, usando para o valor “e” a aproximação 2,7. O aspecto do gráfico é semelhante ao do gráfico da função exponencial de base maior do que 1.

Atividade de pesquisa

Pesquise sobre a história do número “e” e elabore um texto.