3. Logaritmos

Inicialmente vamos tratar dos *logaritmos*, uma ferramenta criada para auxiliar no desenvolvimento de cálculos e que ao longo do tempo mostrou-se um modelo adequado para vários fenômenos nas ciências em geral. Os logaritmos aparecem na resolução de equações exponenciais com potências de bases diferentes, como a equação $3^x = 5$. Para resolver equações deste tipo os métodos já estudados não são adequados: precisamos do auxílio dos logaritmos.

Definição Sejam *a* e *b* números reais positivos, com $a \neq 1$. Chama-se *logaritmo de b na base a* o expoente que se deve dar à base *a* para que o resultado obtido seja igual a *b*.

Simbolicamente, para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ tem-se

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Observação 7. Lemos "logaritmo de *b* na base *a* é igual a *x* se e somente se *a* elevado a *x* é igual a *b*". A *base* é *a*, o *logaritmando* é *b* e o *logaritmo* é *x*.

Observação 8. Decorre diretamente da definição que $a^{\log_a b} = b$.

Exemplos

13) $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

14) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ pois $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

15) $\log_7 1 = 0$ pois $7^0 = 1$

Note que quando o logaritmando for 1, o logaritmo será zero (veja a definição de potência com expoente zero).

Exercícios resolvidos

16) Encontre $\log_{0,25} 32$

Resolução

Chamamos $\log_{0,25} 32 = x$. Então, por definição, $(0,25)^x = 32$. Como $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, temos

$\left(2^{-2}\right)^{x} = 2^{5}$. Resolvendo a equação exponencial obtemos $-2x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$. Assim,

$\log_{0,25} 32 = -\frac{5}{2}$.

17) Calcule $\log_{0,04} 125$

Resolução

Para calcular $\log_{0,04} 125$ fazemos $125 = 5^{3}$ e utilizamos a definição de logaritmo:

$$\log_{0,04} 125 = x \Leftrightarrow (0,04)^{x} = 5^{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{x} = 5^{3} \Leftrightarrow \left(5^{-2}\right)^{x} = 5^{3} \Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^{3} \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Assim, $\log_{0,04} 125 = -\frac{3}{2}$.

18) Se $\log_{2} m = k$, determine o valor de $\log_{8} m$.

Resolução

Seja x o valor de $\log_{8} m$, isto é, $\log_{8} m = x$.

Pela definição de logaritmo temos $\log_{2} m = k \Leftrightarrow 2^{k} = m$ e $\log_{8} m = x \Leftrightarrow 8^{x} = m$.

Logo, $2^{k} = 8^{x} \Leftrightarrow 2^{k} = \left(2^{3}\right)^{x} \Leftrightarrow 2^{k} = 2^{3x} \Leftrightarrow 3x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{3}$.

Propriedades dos logaritmos

Para $a,b,c \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $a \neq 1$ valem as seguintes propriedades:

L1) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero.

Simbolicamente, $\log_{a} 1 = 0$.

Demonstração. Decorre diretamente da definição de logaritmo e de potência com expoente zero: $\log_{a} 1 = 0$ pois $a^{0} = 1, \forall a \in \mathbb{R}_{+}^{*}, a \neq 1$

L2) $\log_{a} a = 1$

Demonstração. $\log_{a} a = 1$ pois $a^{1} = a, \forall a \in \mathbb{R}_{+}^{*}, a \neq 1$

L3) $\log_{a} b = \log_{a} c \Leftrightarrow b = c$

Demonstração. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow \overbrace{a^{\log_a c} = b}^{\text{L3}} \Leftrightarrow c = b$

L4) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

Demonstração. Fazemos $\log_a b = x,\ \log_a c = y$ e $\log_a (b.c) = z$. Então

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$
$\log_a (b.c) = z \Leftrightarrow a^z = b.c$

Substituindo, temos $a^z = b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$. Logo, $a^z = a^{x+y}$ e $z = x + y$, como queríamos demonstrar.

L5) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Demonstração. Deixamos como exercício (veja a demonstração anterior)

L6) $\log_a b^\alpha = \alpha .\log_a b$

Demonstração. Fazemos $\log_a b = x,\ \log_a b^\alpha = y$; vamos provar que $\alpha x = y$. De fato,

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
$\log_a b^\alpha = y \Leftrightarrow a^y = b^\alpha$

substituindo, $a^y = \left(a^x\right)^\alpha = a^{x\alpha} \Leftrightarrow y = \alpha x$.

L7) (Mudança de base) Para $c \neq 1$ tem-se $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Demonstração. Deixamos como exercício (veja as demonstrações anteriores).

Observação 9. A propriedade 7 é utilizada quando temos logaritmos em bases diferentes; você deve ter notado que nas propriedades a base é sempre a mesma. Logo, para utilizar as propriedades com logaritmos em bases diferentes, é necessário convertê-los para uma base conveniente. As propriedades **L8** e **L9** são uma conseqüência da mudança de base.

L8) Para a e b números reais positivos, diferentes de 1, tem-se $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Demonstração É conseqüência da propriedade L7. Deixamos como exercício.

L9) Para a e b números reais positivos com $a \neq 1$ e para β um número real não nulo, tem-se $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta}\log_a b$.

Demonstração Também é conseqüência de L7; deixamos como exercício.

Observação 10: Denotamos por $\ln a$ o logaritmo de a na base "e", isto é, $\log_e a = \ln a$.

Observação 11: Quando a base do logaritmo é 10, o logaritmo é chamado *decimal* e muitos autores denotam simplesmente "log", sem escrever a base: $\log_{10} a = \log a$.

Exercício resolvido

19) Calcule $A = \log_3 5.\log_4 27.\log_{25}\sqrt{2}$

Resolução

Inicialmente observe que $\log_4 27 = \log_4 3^3 = 3\log_4 3$; também

$\log_{25}\sqrt{2} = \log_{25} 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_{25} 2$ (propriedade L7). Então

$$A = \log_3 5.\log_4 27.\log_{25}\sqrt{2} = (\log_3 5).3.(\log_4 3).\frac{1}{2}(\log_{25} 2) = \frac{3}{2}(\log_3 5).(\log_4 3).(\log_{25} 2)$$

Vamos fazer uma mudança de base, colocando todos os logaritmos em base 3 (L8):

$$\log_4 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 2^2} = \frac{1}{2\log_3 2} \quad \text{e} \quad \log_{25} 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 25} = \frac{\log_3 2}{\log_3 5^2} = \frac{\log_3 2}{2\log_3 5}$$

Assim,

$$A = \frac{3}{2}(\log_3 5).\frac{1}{2\log_3 2}.\frac{\log_3 2}{2\log_3 5} = \frac{3}{8}.\frac{\log_3 5}{\log_3 5} = \frac{3}{8}$$

4. A função logarítmica

Vimos na *Observação* 6 que a função $f:\mathbb{R} \to \,]0,+\infty[\,$, $f(x) = a^x$ é inversível para todo número real positivo $a \neq 1$, isto é, existe uma função $g:]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ tal que

$f \circ g = g \circ f = Id$. Esta função g é a *função logarítmica de base* a, que a cada número real positivo x associa o número real $\log_a x$.

Definição Seja a um número real positivo, $a \neq 1$. A função logarítmica de base a é a inversa da função exponencial de base a, $g:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$.

Considerações sobre a definição

1) A função exponencial e a função logarítmica são a inversa uma da outra, desde que tomemos o conjunto $]0,+\infty[$ como contradomínio da função exponencial e como domínio da função logarítmica. Também deve estar estabelecido um número real positivo $a \neq 1$ como base. Assim, chamando f a função exponencial (de base a) $f(x) = a^x$ e g a função logarítmica (também de base a) $g(x) = \log_a x$, temos:

$\mathbb{R} \xrightarrow[f]{}]0,+\infty[\xrightarrow[g]{} \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_a f(x) = \log_a a^x = x.\log_a a = x.1 = x$.

$g \circ f$ é a função identidade no conjunto $\mathbb{R}$.

Por outro lado, também temos:

$]0,+\infty[\xrightarrow[g]{} \mathbb{R} \xrightarrow[f]{}]0,+\infty[$

$f \circ g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$.

$f \circ g$ é a função identidade no conjunto $]0,+\infty[$.

2) A função logarítmica é bijetora, uma vez que admite inversa.

De fato, $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$

(i) é injetora pois: se $x_1, x_2 \in]0,+\infty[$ e $g(x_1) = g(x_2)$, temos

$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = a^{\log_a x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (lembre-se da *Observação 8*).

(ii) é sobrejetora pois: se $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$, $x = a^y$, tal que

$g(x) = g(a^y) = \log_a a^y = y.\log_a a = y$.

3) A que expoente deve-se elevar 10 para obter 1000? A resposta a esta pergunta é 3, uma vez que $10^3 = 1000$. Mas qual deve ser o expoente de 10 para obtermos 25? Neste caso a resposta é $\log 25$ (base 10), já que pela consideração anterior temos $10^{\log 25} = 25$. Uma calculadora científica (que calcula os logaritmos decimais) nos dá uma aproximação deste número, que é um número irracional: $\log 25 \cong$ 1,39794000867. Você pode usar a calculadora para encontrar as aproximações dos logaritmos em outras bases, utilizando a propriedade da mudança de base. Por exemplo: $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \cong 2{,}32192809489$. Lembre-se que este número é uma *aproximação*!

4) Note que o domínio da função logarítmica é o conjunto $]0,+\infty[$. Isto significa que só podemos encontrar $g(x) = \log_a x$ para valores positivos de x, e também para valores positivos de $a \neq 1$.

Propriedades da função logarítmica

Consideramos $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $g(x) = \log_a x$ em todas as propriedades que seguem. As três primeiras propriedades já foram demonstradas como propriedades dos logaritmos, e constituíram-se na motivação principal e original para o desenvolvimento dos logaritmos como um instrumento de cálculo no século XVII. Como você pode ver, os logaritmos transformam produtos em somas e potências em produtos, facilitando o cálculo com grandes números (na Astronomia, por exemplo); se fosse preciso multiplicas dois números com muitos algarismos ou muitas casas decimais, tomava-se a soma dos logaritmos destes números usando uma tabela (chamadas *tábuas de logaritmos*), e este valor seria o logaritmo do produto; com o auxílio da tabela recuperava-se o produto desejado. Com o aparecimento da calculadora no século XX, este procedimento se tornou obsoleto. As atenções então foram voltadas para a função logarítmica, que é de extrema importância em Matemática e em suas aplicações.

FL1) $g(x.y) = g(x) + g(y)$, $\forall\, x, y \in\ ]0,+\infty[$

FL2) Se $\alpha \in \mathbb{R}, g(x^{\alpha}) = \alpha .g(x), \forall\, x, y \in \left]0,+\infty\right[$

FL3) $g\left(\dfrac{x}{y}\right) = g(x) - g(y), \forall\, x, y \in \left]0,+\infty\right[$

FL4) g é crescente se $a > 1$ e é decrescente para $0 < a < 1$

Demonstração

Suponhamos $a > 1$; sejam $x_1, x_2 \in \left]0,+\infty\right[$ tais que $x_1 < x_2$. Como x_1 e x_2 estão na imagem da função exponencial f de base a, existem $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(y_1) = x_1$ e $f(y_2) = x_2$. Conseqüentemente, $a^{y_1} = x_1$, $a^{y_2} = x_2$ e $a^{y_1} < a^{y_2}$. Como a função f é crescente para $a > 1$, devemos ter $y_1 < y_2$ (pois se $y_2 < y_1$ teríamos $x_2 < x_1$, o que não acontece). Assim, uma vez que $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$ (a função logarítmica é a inversa da função exponencial), temos $g(x_1) < g(x_2)$ e g é crescente.

Faça uma demonstração análoga para o caso $0 < a < 1$.

FL5) Se $a > 1$, então $\begin{cases} \log_a x < 0 \ se\ 0 < x < 1 \\ \log_a x > 0 \ se\ x > 1 \end{cases}$

Se $0 < a < 1$ então $\begin{cases} \log_a x > 0 \ se\ 0 < x < 1 \\ \log_a x < 0 \ se\ x > 1 \end{cases}$

Demonstração

É uma conseqüência direta da FL5. Faça como exercício.

Exercícios resolvidos

20) Determine o domínio da função $g(x) = \log_2(1 - 2x)$

Resolução

Lembrando a consideração 4, devemos ter $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Então o domínio da função é o conjunto $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

Observação 12. Note que a função g é a composta das funções $h(x) = \log_2 x$ e $t(x) = 1 - 2x$. De fato, $g(x) = (h \circ t)(x) = h(t(x)) = \log_2 t(x) = \log_2(1 - 2x)$. A determinação do domínio é conseqüência das considerações que fizemos no Capítulo 4 sobre a existência da função composta. Funções compostas do tipo $g(x) = \log_a s(x)$ com $s(x)$ uma função real de variável real serão muito utilizadas na disciplina de Cálculo.

21) Se $g(x) = \ln\frac{1}{x}$, calcule o valor de $g(\mathrm{e}^3)$.

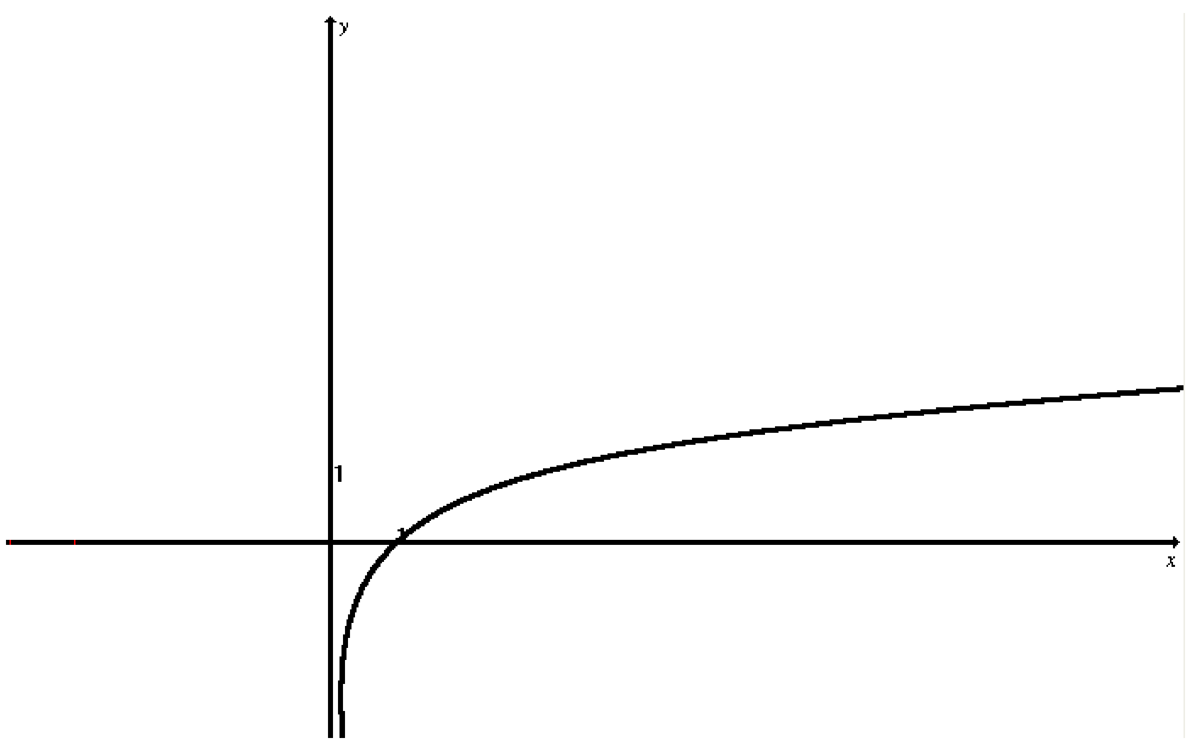
Resolução

A função logarítmica está na base e; temos

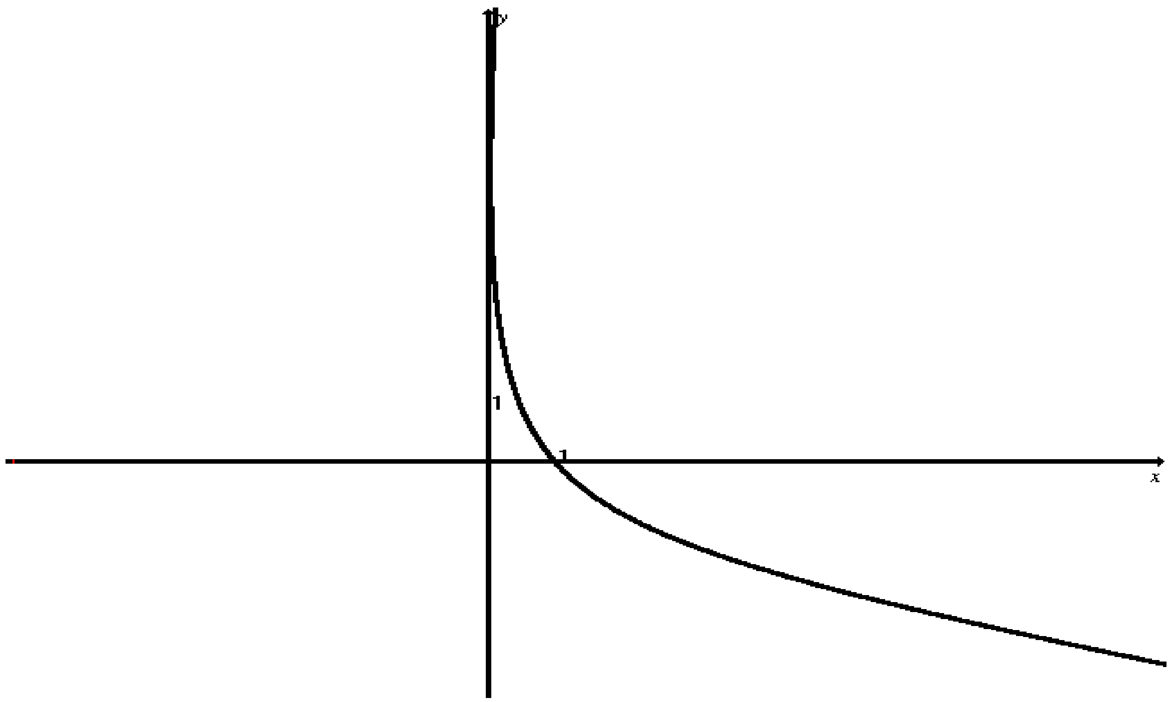
$$g(\mathrm{e}^3) = 3.g(\mathrm{e}) = 3.\ln\frac{1}{\mathrm{e}} = 3.\ln \mathrm{e}^{-1} = (-1).3.\ln \mathrm{e} = -3$$

Gráfico da função logarítmica

Para fazer o gráfico de $g(x) = \log_a x$ podemos usar o conhecido gráfico de sua inversa $f(x) = a^x$: eles serão simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante. Eventualmente, você pode marcar alguns pontos usando calculadora. Faremos como primeiro exemplo $g(x) = \log_3 x$, usando sua inversa $f(x) = 3^x$.



Exemplo 2) Fazer o gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ usando sua inversa $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Observação 13. É importante conhecer o aspecto dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, distinguindo os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Exercícios propostos

11) Determine o domínio das funções

a) $f(x) = \log_{(x+1)}(2x^2 - 5x + 2)$ b) $g(x) = \log_5 \dfrac{x+1}{1-x}$

12) Esboce o gráfico das funções:

a) $g(x) = \log_2 x^2$ b) $h(x) = |\log_3 x|$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

13) Determine os valores de K para que o domínio da função *f* dada por

$f(x) = \log(x^2 + Kx + K)$ seja o conjunto dos números reais.

Equações logarítmicas

Da mesma forma que utilizamos as propriedades da função exponencial para resolver as equações exponenciais, podemos utilizar a função logarítmica para resolver as *equações logarítmicas*. Faremos exemplos dos três tipos clássicos destas equações.

1^o) *Equação do tipo* $\log_a h(x) = \log_a k(x)$*, com* $h(x)$ *e* $k(x)$ *funções reais de variável real.*

É a equação que apresenta uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base. Sua resolução está baseada no fato da função logarítmica ser injetora.

22) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5)$

Como a função logarítmica é injetora, concluímos que $3x+2=2x+5$ (1). Resolvendo esta equação obtemos $x=3$. Mas não podemos esquecer que o domínio da função logarítmica é o intervalo $]0,+\infty[$, isto é, devemos ter $3x+2>0$ e $2x+5>0$. Isto significa que a solução da equação deve pertencer à intersecção dos conjuntos soluções destas duas inequações. Resolvendo as inequações, obtemos

(i) $3x+2>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{2}{3}$, $A_1 = \left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

(ii) $2x+5>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{5}{2}$, $A_2 = \left]-\dfrac{5}{2},+\infty\right[$

$$A = A_1 \cap A_2 = \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$$

Como o valor encontrado $x=3$ pertence ao intervalo $\left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[$, o conjunto solução da equação é $S=\{3\}$.

Observação 14. Os livros didáticos ensinam a substituir a solução da equação $3x+2=2x+5$ nas expressões $3x+2$ e $2x+5$. Se resultar um número positivo em ambos os casos, a solução da equação $3x+2=2x+5$ é a solução da equação logarítmica. Este procedimento está correto e torna mais eficiente a resolução. No entanto, não podemos esquecer o motivo que leva a este procedimento, isto é, o fato do domínio da função logarítmica ser o intervalo $]0,+\infty[$; este procedimento verifica o sinal das funções $h(x)=3x+2$ e $k(x)=2x+5$ em $x=3$. Veja outra resolução usando este procedimento:

23) $\log_2(5x^2-14x+1)=\log_2(4x^2-4x-20)$

$5x^2-14x+1=4x^2-4x-20 \Leftrightarrow x^2-10x+21=0$

Raízes: $x_1=7$ e $x_2=3$. Substituindo estes valores em $h(x)=5x^2-14x+1$ e $k(x)=4x^2-4x-20$, obtemos (note que $h(7)=k(7)$ e $h(3)=k(3)$):

$h(7)=k(7)=5.7^2-14.7+1=148>0$ (7 serve!)

$h(3)=k(3)=5.3^2-14.3+1=4>0$ (3 também serve!)

Assim, as duas raízes encontradas são soluções da equação logarítmica: $S=\{3,7\}$.

Exercícios propostos

Resolva as equações do primeiro tipo:

14) $\log_{\frac{1}{2}}(5x^2-3x-11)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x-8)$ Resposta: $S=\emptyset$

15) $\log_5(x^2-3x-10)=\log_5(2-2x)$ Resposta: $S=\{-3\}$

2º) *Equação do tipo* $\log_a h(x)=\alpha$

É a equação que resulta da igualdade entre um logaritmo e um número real. Sua resolução é baseada na definição de logaritmo.

24) $\log_5(4x-3)=2$

Pela definição de logaritmo temos que $4x-3=5^2 \Leftrightarrow 4x-3=25 \Leftrightarrow 4x=28 \Leftrightarrow x=7$

Como devemos ter $4x-3>0$ (pelas mesmas considerações feitas no exemplo 22), e $4.7-3=25>0$, $x=7$ é solução da equação: $S=\{7\}$.

Exercícios propostos

Resolva as equações do segundo tipo:

16) $\log_3(x-1)^2=2$ Resposta: $S=\{4,-2\}$

17) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-9x+4)=-2$ Resposta: $S=\left\{5,-\frac{1}{2}\right\}$

18) $\log_4(x^2 - 4x + 3) = \dfrac{1}{2}$ Resposta: $S = \left\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\right\}$

3º) *Equações que utilizam incógnita auxiliar*

É a equação que faz uso de uma mudança de incógnita (ou mudança de variável) para obter uma equação já conhecida.

25) $\log_3(\log_2 x) = 1$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos uma equação do segundo tipo: $\log_3 y = 1$. Resolvendo esta equação obtemos $y = 3$. Substituindo y em $\log_2 x = y$ temos novamente uma equação do segundo tipo, $\log_2 x = 3$. Resolvendo esta equação obtemos $x = 2^3 = 8$. Logo, $S = \{8\}$.

26) $(\log_5 x)^2 - \log_5 x = 2$

Fazendo $\log_5 x = y$, temos $y^2 - y = 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau obtemos as raízes $y_1 = 2$ e $y_2 = -1$. Substituindo $y_1 = 2$ em $\log_5 x = y$, obtemos a equação $\log_5 x = 2$, cuja solução é $x = 5^2 = 25$. Substituindo $y_2 = -1$ em $\log_5 x = y$ obtemos a equação $\log_5 x = -1$, cuja solução é $x = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$. Assim, $S = \left\{25, \dfrac{1}{5}\right\}$.

Exercícios propostos

Resolva as equações do terceiro tipo:

19) $\dfrac{2 + \log_3 x}{\log_3 x} + \dfrac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} = 2$ Resposta: $S = \left\{\dfrac{1}{9}\right\}$

20) $(\log x).(\log x - 1) = 6$ Resposta: $S = \left\{1000, \dfrac{1}{100}\right\}$

21) $(\log x)^3 = 4.\log x$ Resposta: $S = \left\{1, 100, \dfrac{1}{100}\right\}$

Observação 15. Os três tipos de equação que acabamos de estudar podem ser combinados com as propriedades dos logaritmos para resolver outros vários tipos de equações. Vamos fazer mais alguns exemplos.

27) Resolver a equação $\log_x(2x+3)=2$

Resolução

Note que a incógnita aparece na base, que deve ser um número positivo e diferente de 1, isto é, $x>0$ e $x\neq 1$. Usando a definição de logaritmo temos:

$2x+3=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos as raízes $x_1=3$ e $x_2=-1$. Como x deve ser positivo (e diferente de 1), descartamos a raiz $x_2=-1$. Assim, $x_1=3$ é a solução: $S=\{3\}$.

28) Resolver a equação $\log_x 2+\log_2 x=2$

Resolução

Note aqui que a incógnita aparece tanto na base como no logaritmando; devemos ter $x>0$ e $x\neq 1$. Como são logaritmos de bases diferentes, não podemos usar a propriedade do produto (L4). Vamos então fazer uma mudança de base (L7):

$\log_x 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}=\dfrac{1}{\log_2 x}$ (note que $\log_2 x\neq 0$ pois $x\neq 1$)

Substituindo na equação temos $\dfrac{1}{\log_2 x}+\log_2 x=2$, que é uma equação do terceiro tipo.

Fazendo $\log_2 x=y$, $y\neq 0$, ficamos com a equação

$\dfrac{1}{y}+y=2 \Leftrightarrow \dfrac{1+y^2}{y}=\dfrac{2y}{y} \Leftrightarrow y^2-2y+1=0$, cujas raízes são $y_1=y_2=1$. Substituindo $y=1$ em $\log_2 x=y$, obtemos a equação $\log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2^1=2$. Logo, $S=\{2\}$.

29) Resolver a equação $\log x^2=\log\left(x+\dfrac{11}{10}\right)+1$

Resolução

Note que neste caso todos os logaritmos estão na mesma base 10. Fazendo $1=\log 10$ ficamos com a equação

$$\log x^2 = \log\left(x + \frac{11}{10}\right) + \log 10$$

Usando a propriedade do produto (L5), obtemos

$$\log x^2 = \log 10.\left(x + \frac{11}{10}\right)$$

e esta é uma equação do primeiro tipo. Assim,

$$x^2 = 10.\left(x + \frac{11}{10}\right) \Leftrightarrow x^2 = 10x + 11 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 11 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau encontramos as raízes $x_1 = 11$ e $x_2 = -1$.

Verificamos que ambas raízes são solução da equação logarítmica (por que?). Logo, $S = \{11, -1\}$.

30) Resolver a equação $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) - \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) = -4$

Resolução

Inicialmente note que $3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$ e $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Fazendo a intersecção das duas condições obtemos $x > \frac{3}{2}$. A solução que estamos procurando deverá pertencer ao conjunto $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Usando a propriedade do quociente (L5), podemos escrever $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right) = -4$, que é uma equação do segundo tipo. Então

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{3x + 2}{2x - 3} \Leftrightarrow 2^4 = \frac{3x + 2}{2x - 3} \Leftrightarrow 32x - 48 = 3x + 2 \Leftrightarrow 29x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{29}{50}$$

Como $\frac{29}{50} = 0,58 < 1,5 = \frac{3}{2}$, o valor $\frac{29}{50}$ não pertence ao intervalo $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ e conseqüentemente não é solução da equação logarítmica. Logo, $S = \emptyset$.

Exercícios propostos

Resolver as equações:

22) $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

23) $x + \log(1 + 2^x) = x.\log 5 + \log 6$

24) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$

25) $\log_3(x + 2) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) = \log_3(2x - 5)$

26) $9.x^{\log_3 x} = x^3$

27) $\log_3\left[\log_2(3x^2 - 5x + 2)\right] = \log_3 2$

Tarefa de Pesquisa

Sabemos que as funções exponenciais e logarítmicas são modelos úteis para o estudo da concentração de uma solução, do cálculo de um capital a juros fixos ou da desintegração radioativa. Pesquise nos livros didáticos exemplos destas aplicações.

Bibliografia

1. Iezzi, D. et all *Coleção Fundamentos da Matemática Elementar*, Volume 2. Atual Editora, São Paulo, 1996

2. Lima, E.L. et all *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 2004.

3. Lopes, L. *Manual das Funções Exponenciais e Logarítmicas*. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1999