Forma escalonada de uma matriz

Antes de definir matriz escalonada vamos explicar o que é o primeiro elemento não nulo de uma linha:

O primeiro elemento não nulo de uma linha, olhando a linha da esquerda para a direita, é o primeiro elemento diferente de zero na linha.

Por exemplo, na matriz A do exemplo 1. Na 1ª linha, o primeiro elemento não nulo é o 1. Na 2ª linha, o primeiro elemento não nulo é o 3. Na 3ª linha, o primeiro elemento não nulo é o 7.

Exemplo 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Observe que à direita do primeiro elemento não nulo pode haver zeros. Além disso, uma linha pode não ter primeiro elemento não nulo. Por exemplo, na matriz do Exemplo 2 a seguir, a linha 3 contém apenas zeros.

Exemplo 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma linha que tem todos os seus elementos iguais a zero é chamada de uma linha nula. Se tiver pelo menos um elemento distinto de zero, a linha é não nula.

Vamos, a seguir, definir o que é uma matriz na forma escalonada.

Definição. Uma matriz está na forma escalonada se o número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha cresce de cada linha para a seguinte abaixo dela até que restem ou não, apenas linhas nulas.

OBS-1. Chama-se matriz escalonada a uma matriz que está na forma escalonada.

Exemplo 3: Matrizes na forma escalonada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS – 2. Consideramos que uma matriz nula de qualquer ordem não está na forma escalonada.

Exemplo 4. Matrizes que não estão na forma escalonada:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição. Posto de uma matriz escalonada:

É o número de linhas não nulas da matriz escalonada.

Exemplo 5. As matrizes A, B e C do exemplo tem postos P(A)=2, P(B)=4, P(C)=2.

Operações elementares nas linhas

1 – Permutação de uma linha por outra.

Exemplo 6. Permutação da linha 1 com a linha 3:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{L_{13}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que a operação foi indicada ao lado da linha a ser permutada. Essa indicação deve ser feita sempre: Se a linha L_i for permutada com a linha L_j deve-se indicar isso com o símbolo L_{ij} no lado direito da linha L_i.

2 – Multiplicação de uma linha por um número $k \neq 0$. Consiste em multiplicar todos os elementos da linha pelo mesmo número k.

Exemplo 7. Multiplicação da linha 2 pelo número 1/2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Observe que a operação foi indicada ao lado direito da linha a ser multiplicada. Isso deve ser feito sempre!

3 – Substituição dos elementos de uma linha L_i por outros, obtidos fazendo a seguinte operação: $L_i + kL_j$, onde $k \neq 0$ e L_j é outra linha distinta de L_i.

Note que a linha L_i a ser substituída não é multiplicada por nenhum número. Somente a L_j.

Exemplo 8. Substituição na linha L_2 por $L_2+(-4)L_1$:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\\ 6 & 0\end{pmatrix} L_2 - 4L_1 \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 4-4.1 & 7-4.3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -5\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

Observe que a operação foi indicada ao lado direito da linha a ser substituída. Isso deve ser feito sempre!

Escalonamento de matrizes

A menos de alguns casos especiais, é sempre possível obter uma matriz escalonada a partir de uma que não está na forma escalonada. Isso é realizado pela aplicação das operações elementares 1, 2 e 3. Esse processo é chamado de escalonamento.

<u>Exemplo 9</u>. Escalonar as seguintes matrizes.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},\ b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{-2L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} L_2 + L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

OBS-4. A partir de uma matriz dada é sempre possível obter mais de uma matriz escalonada. Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3}L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} L_2 + (-6)L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz escalonada obtida é distinta da obtida anteriormente.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix}^{\frac{1}{3}L_1} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix} L_2 - 2L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix}_{L_3 - 4L_1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{L_3 + L_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS-5. Nunca aplique várias operações simultaneamente em várias linhas numa mesma etapa do escalonamento. Os livros sobre o assunto, em geral, fazem operações simultâneas mas isso é por motivo gráfico e para não ocupar muito espaço. Ao fazer o escalonamento faça uma operação elementar de cada vez, como foi feito nos exemplos acima. Assim deve ser feito na prova.

OBS-6. Apenas operações elementares podem ser aplicadas no escalonamento de uma matriz.

Portanto, na prova, também não faça o seguinte:

Exemplo 10. As operações $3L_2 - 2L_1$ e $3L_3 - 4L_1$ empregadas abaixo não são operações elementares. Não use esse tipo de operação na prova.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix} 3L_2 - 2L_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 4 & 9 & -7 \end{pmatrix} 3L_3 - 4L_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} L_3 + L_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS-7. Importante. Uma matriz não escalonada também tem posto. Mas temos que primeiro escalonar ela e, depois, obter o posto da matriz escalonada obtida. Dizemos, então, que o posto da matriz não escalonada é o posto da matriz escalonada obtida a partir dela pelas operações elementares.

Exemplo 11. No exemplo 9, ítem a), o posto da matriz A é 2. Indicamos assim: P(A)=2. No ítem b), o posto da matriz B é 2. Indicamos assim: P(B)=2. Note que o número de linhas não nulas na matriz escalonada obtida não é igual ao número de linhas não nulas da matriz dada. No caso da matriz A, são iguais, mas não é o caso da matriz B.

OBS-8. Importante. Todas as matrizes escalonadas obtidas de uma mesma matriz tem o mesmo posto. No exemplo 9, item a), a matriz A foi escalonada de duas maneiras. Obtivemos duas matrizes escalonadas distintas. Observe que elas possuem o mesmo posto.