MTM5801 - H-Cálculo I - 2011/01
Prof. Gilles Gonçalves de Castro

Tabelas-verdade

(Com aplicações para operações em conjuntos)

Apresentamos alguns elementos da lógica matemática (ver por exemplo [1] e [2]) e como utilizar tais elementos para fazer algumas demonstrações com teoria de conjuntos (ver por exemplo [3]).

Definição 1 *Uma proposição é um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.*

Definição 2 *Uma proposição simples é aquela que não contém outra proposição como parte integrante de si mesma.*

Exemplos de proposições simples:
p: Pedro é estudante.
q: O número 25 é um quadrado perfeito.
r: $x \in A$

Definição 3 *Uma proposição composta é aquela feita pela composição de duas ou mais proposições.*

Exemplos de proposições compostas:
P: Pedro é estudante e Maria é professora. Q: Se o número 25 é quadrado perfeito então a raiz quadrada de 25 é um número inteiro. R: $x \in A$ ou $x \in B$.

Uma tabela-verdade apresenta todos os valores lógicos possíveis para uma proposição simples, a combinaçao várias proposições simples e o eventual valor lógico de um proposição composta para cada combinação dos valores das proposições simples que a formam.

Na lógica clássica, trabalhamos com o princípio do terceiro excluído, ou seja, dada uma proposição qualquer, os únicos valores que ela pode assumir é V ou F.

Se temos apenas uma proposição simples p, sua tabela-verdade seria:

p
V
F

Com duas proposições simples p e q, temos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Note que o número de casos possíveis para n proposições simples é 2^n.

Observação 4 *Em alguns casos, já sabemos que o valor lógico de uma proposição. Nestes casos, na hora de montar a tabela verdade, não usaremos todos os valores lógicos possíveis, mas apenas aquele que a proposição assume.*

Por exemplo, a proposição p:$x \in \emptyset$ é sempre falta, então sua tabela verdade seria:

p
F

Para proposições compostas, usaremos alguns conectivos básicos ou combinações delas. Vejamos as principais:

Negação: (símbolo: $\neg$)

p	$\neg$p
V	F
F	V

$\neg$p lê-se "não p".

Conjunção: (símbolo: $\wedge$)

p	q	p$\wedge$q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p$\wedge$q lê-se "p e q".

Disjunção: (símbolo: $\vee$)

p	q	p$\vee$q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p$\vee$q lê-se “p ou q”.

Condicional: (símbolo: $\rightarrow$)

p	q	p$\rightarrow$q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p$\rightarrow$q lê-se “se p então q”.

Bicondicional (símbolo: $\leftrightarrow$)

p	q	p$\leftrightarrow$q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p$\leftrightarrow$q lê-se “p se e somente se q”.

Definição 5 *Dizemos que duas proposições P(p,q,...) e Q(p,q,...) são equivalente se elas possuem a mesma tabela-verdade.*

Exemplo 6 *Sejam p e q são duas proposição.* $p\rightarrow q$ *é equivalente a* $\neg q\rightarrow \neg p$. *Construindo a tabela-verdade:*

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p\rightarrow q$	$\neg q\rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Observação 7 *Graças a esse exemplo, ao invés de mostrarmos uma afirmação do tipo "se p então q", podemos mostrar sua forma equivalente "se não q então não p". Uma demonstração desse tipo é chamada de prova pela contrapositiva.*

Agora, vejamos como demonstrar algumas igualdades de conjuntos usando tabela verdade. Lembre que a união corresponde ao conectivo "ou" e a intersecção corresponde ao conectivo "e".

Exemplo 8 $A \cup \emptyset = A$

Seja p: $x \in A$ e q: $x \in \emptyset$ e note que q assume apenas o valor lógico F. Nossa igualdade é o mesmo que $p \vee q$ é equivalente a p.

p	q	$p \vee q$
V	F	V
F	F	F

Exemplo 9 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Neste caso as proposições são p: $x \in A$, q: $x \in B$ e r: $x \in C$. Nossa igualdade se transforma em $p \vee (q \wedge r)$ é equivalente a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Referências

[1] Cezar A. Mortari, *Introdução à Lógica*, Editora Unesp.

[2] Edgar de Alencar Filho, *Iniciação à Lógica Matemática*, Editora Nobel.

[3] Elon Lages Lima, *Curso de Análise Volume 1*, Projeto Euclide, IMPA.