Notas sobre Diffy Qs

Equações Diferenciais para Engenheiros

Autor da versão original: Jiří Lebl
Adaptação a MTM 5163 e Tradução: Martin Weilandt

16 de novembro de 2011

Typeset in LaTeX.

Sumário

Capítulo 3

Equações diferenciais de primeira ordem

3.1 Introdução a equações diferenciais

Note: , Capítulo 1 em [BD]

3.1.1 Equações diferenciais

As leis da física geralmente são escritas com equações diferenciais. Portanto, toda ciência e engenharia usa equações diferenciais até um certo grau. Entender equações diferenciais é essencial para entender quase tudo que você vai estudar nas suas aulas de ciência e engenharia. Você pode pensar na matemática como a linguagem de ciência e equações diferenciais como uma das partes mais importantes desta linguagem para ciência e engenharia. Como analogia suponha que todas suas classes a partir de agora são dadas em swahili. Neste caso seria importante aprender swahili primeiro, senão você vai ter problemas de obter uma boa nota nas suas outras classes.

Você já viu muitas equações diferenciais talvez sem saber disso. E você até já resolveu equações diferenciais simples em outras classes de Cálculo. Vamos ver um exemplo que você provavelmente ainda não viu:

$$\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t. \tag{3.1}$$

Aqui x é a *variável dependente* e t é a *variável independente*. Equação (3.1) é um exemplo básico duma *equação diferencial*. De fato, ela é um exemplo duma *equação diferencial de ordem um*, pois ela envolve apenas a primeira derivada da variável dependente. Esta equação resulta da lei de Newton sobre esfriamento onde a temperatura ambiente oscila com o tempo.

3.1.2 Soluções de equações diferenciais

Resolver a equação diferencial significa achar x em termos de t. Isto é, nós queremos achar uma função em t, que nós vamos chamar x, tal que quando nós colocamos x, t, e $\frac{dx}{dt}$ em (3.1), a equação vale. É a mesma ideia que seria para uma equação normal (algébrica) só de x e t. Nós afirmamos que

$$x = x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$$

é uma *solução*. Como nós checamos? Nós simplesmente colocamos x na equação (3.1)! Primeiro temos de calcular $\frac{dx}{dt}$. Nós achamos que $\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t + \cos t$. Agora vamos calcular o lado esquerdo de (3.1).

$$\frac{dx}{dt} + x = (-\operatorname{sen} t + \cos t) + (\cos t + \operatorname{sen} t) = 2\cos t.$$

Yay! Nós obtemos exatamente o lado direito. Mas tem mais! Nós afirmamos que $x = \cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}$ também é uma solução. Vamos tentar,

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t}.$$

De novo colocando no lado esquerdo de (3.1)

$$\frac{dx}{dt} + x = (-\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t}) + (\cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}) = 2\cos t.$$

E funciona mais uma vez!

Então podem existir soluções diferentes. De fato, para nossa equação todas as soluções podem ser escritas na forma

$$x = \cos t + \operatorname{sen} t + Ce^{-t}$$

para alguma constante C. Veja Figura 3.1 para o gráfico de algumas destas soluções. Nós vamos ver como podemos achar estas soluções algumas aulas mais tarde.

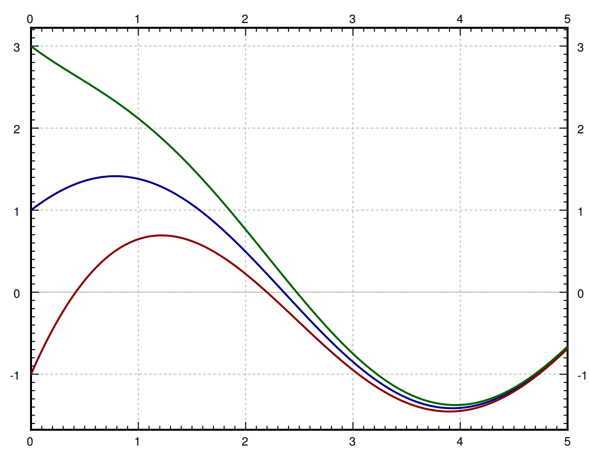


Figura 3.1: Algumas soluções de $\frac{dx}{dt} + x = 2\cos t$.

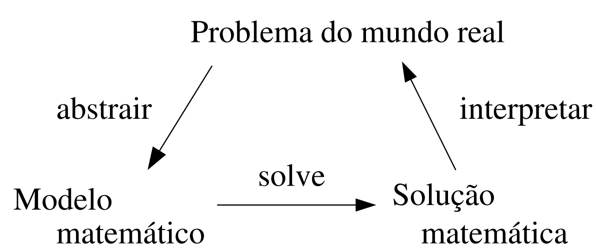
Acontece que resolver equações diferenciais pode ser bastante dificil. Não existe um método geral que resolva cada equação diferencial. Geralmente nós vamos nos concentrar em obter fórmulas exatas para soluções de certos tipos de equações diferenciais mas também existem métodos para obter soluções aproximada.

Na maioria do curso nós vamos considerar *equações diferenciais ordinárias* ou EDOs, que significa que tem somente uma variável independente e as derivadas são somente em relação a esta variável. Se existem várias variáveis independentes, nós vamos obter *equações diferenciais parciais* ou EDPs.

Até para EDOs, que são muito bem entendidas, não é simplesmente girar uma manivela para obter respostas. É importante saber quando é fácil achar soluções e como fazer isso. Embora em aplicações reais você deixe muitos cálculos para computadores, você tem de entender o que está fazendo. Muitas vezes é necessário simplificar ou transformar sua equação em algo que um computador pode entender e resolver. Talvez seja necessário fazer certas hipóteses e mudanças no seu modelo para conseguir.

Para ser um engenheiro ou cientista bem-sucedido você vai ter de resolver problemas no seu trabalho que você nunca viu antes. É importante aprender sobre técnicas de resolver problemas para poder aplicar essas técnicas a novos problemas. Um erro comum é esperar aprender alguma prescrição para resolver todos os problemas que você vai encontrar na sua carreira futura. Este curso não é uma exceção.

3.1.3 Equações diferenciais na prática



Então como usamos equações diferenciais em ciência e engenharia? Primeiro temos algum *problema do mundo real* que nós queriamos entender. Nós introduzimos algumas hipóteses simplificadoras e criamos um *modelo matemático*. Isto é, nos traduzimos a situação do mundo real num conjunto de equações diferenciais. Depois nós aplicamos matemática para obter algum tipo de *solução matemática*. Ainda falta fazer uma coisa. Nós temos de interpretar os resultados. Nós temos de descobrir o que a solução matemático diz sobre o problema do mundo real com que começamos.

Aprender como formular o modelo matemático e como interpretar os resultados é o que classes de física e engenharia fazem. Neste curso nós vamos nos concentrar na análise matemática. Às vezes vamos trabalhar com exemplos simples do mundo real para obter alguma intuição e motivação para o que estamos fazendo.

Vamos considerar um exemplo deste processo. Uma das equações diferenciais mais básicas é o *modelo de crescimento exponencial*. Seja P a população de algumas bactérias numa placa de Petri. Nós supomos que tenha bastante comida e bastante espaço. Então a taxa de crescimento de bactérias vai ser proporcional à população. Em outras palavras, uma grande população cresce mais rapidamente. Denotem t o tempo (em segundos, digamos) e P a população. Nosso modelo vai ser

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

para alguma constante positiva $k > 0$.

Exemplo 3.1.1: Suponhamos que tenha 100 bactérias no instante 0 e 200 bactérias no instante 10s. Quantas bactérias vai ter um minuto do instante 0 (em 60 segundos)?

Primeiro temos de resolver a equação. Nós afirmamos que a solução é dada por

$$P(t) = Ce^{kt},$$

onde C é uma constante. Vamos tentar:

$$\frac{dP}{dt} = Cke^{kt} = kP.$$

E realmente é uma solução.

Muito bem, e agora? Nós não conhecemos C nem k. Mas nós sabemos algo. Nós sabemos que $P(0) = 100$, e nós também sabemos que $P(10) = 200$. Vamos colocar estas condições e ver o que acontece.

$$100 = P(0) = Ce^{k0} = C,$$
$$200 = P(10) = 100\,e^{k10}.$$

Portanto, $2 = e^{10k}$ ou $\frac{\ln 2}{10} = k \approx 0{,}069$. Então nós sabemos que

$$P(t) = 100\,e^{(\ln 2)t/10} \approx 100\,e^{0.069t}.$$

No instante $t = 60$ (1 minuto) a população é $P(60) = 6400$. Veja Figura 3.2.

Vamos conversar sobre a interpretação dos resultados. Nossa solução significa que vai ter exatamente 6400 bactérias na placa no instante 60s? Não! Nós introduzimos hipóteses adicionais que não têm de ser exatamente verdadeiras. Mas se nossas hipóteses são razoáveis, então vai ter aproximadamente 6400 bactérias. Também note que na vida real P é uma quantidade discreta, não um número real. Porém, nosso modelo não contém um problema dizendo que por exemplo em 61 segundos, $P(61) \approx 6859{,}35$.

Normalmente, vamos conhecer o k em $P' = kP$, e queremos resolver a equação para *condições iniciais* diferentes. Mas o que isso significa? Suponhamos $k = 1$ para simplificar. Agora suponhamos que queiramos resolver a equação $\frac{dP}{dt} = P$ sujeito a $P(0) = 1000$ (a condição inicial). Neste caso a solução vai ser (exercício)

$$P(t) = 1000\,e^{t}.$$

Nós vamos chamar $P(t) = Ce^{t}$ *a solução geral*, pois cada solução da equação pode ser escrita nesta forma para alguma constante C. Depois você vai precisar duma condição inicial para descobrir o que é C para achar a *solução particular* que estamos procurando. Geralmente, quando dizemos "solução particular", nós simplesmente queremos alguma solução.

Vamos chegar ao que vamos chamar as quatro equações fundamentais. Estas equções vão aparecer frequentemente e é útil simplesmente memorizar as soluções delas. Estas soluções são razoavelmente fácil de adivinhar lembrando propriedades das funções exponential, seno e coseno. Elas também são fáceis de verificar, o que é algo que você sempre devia fazer.

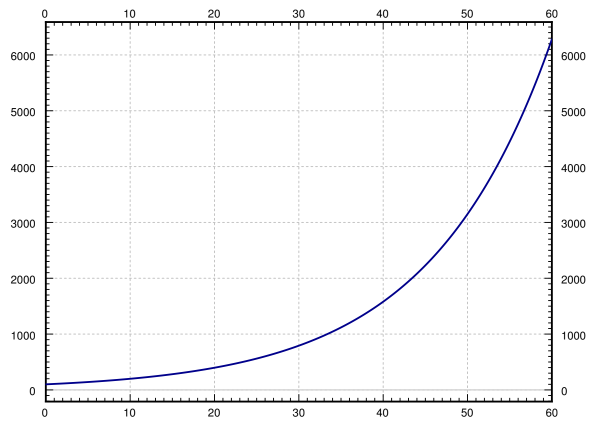


Figura 3.2: Crescimento de bactérias nos primeiros 60 segundos.

A primeira tal equação é

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

para alguma constante $k > 0$. Aqui y é a variável dependente e x a variável independente. A solução geral da equação é

$$y(x) = Ce^{kx}.$$

Nós já vimos acima que esta função é uma solução com nomes de variáveis diferentes.

Em seguida,

$$\frac{dy}{dx} = -ky,$$

para alguma constante $k > 0$. A solução geral desta equação é

$$y(x) = Ce^{-kx}.$$

Exercício* 3.1.1*: *Verifique que o dado y realmente é uma solução da equação.*

Agora consideramos a *equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y,$$

para alguma constante $k > 0$. A solução geral desta equação é

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \operatorname{sen}(kx).$$

Note que nós temos duas constantes na nossa solução geral, pois nós temos uma equação diferencial de segunda ordem.

Exercício* 3.1.2*: *Verifique que o dado y realmente é uma solução da equação.*

E finalmente, consideramos a equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y,$$

para alguma constante $k > 0$. A solução geral desta equação é

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

ou

$$y(x) = D_1 \cosh(kx) + D_2 \operatorname{senh}(kx).$$

Para os que não sabem, cosh e senh são definidos por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Às vezes é mais fácil trabalhar com estas funções do que com funções exponenciais. Elas têm algumas propriedades familiares como $\cosh 0 = 1$, $\operatorname{senh} 0 = 0$, e $\frac{d}{dx} \cosh x = \operatorname{senh} x$ (não, isso não é um erro de digitação) e $\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x$.

Exercício* 3.1.3*: *Verifique que ambas as formas de y dadas acima realmente são soluções da equação.*

Uma nota interessante sobre cosh: O gráfico de cosh é a forma exata que uma corrente pendurada vai fazer. Esta forma é chamada uma *catenária*. Ao contrário da crença popular isso não é uma parábola. Se nós invertemos o gráfico de cosh, ele também é o arco ideal para suportar o próprio peso. Por exemplo, o Gateway Arch em Saint Louis é um gráfico invertido de cosh (se ele fosse simplesmente uma parábola, ele poderia cair). A fórmula usada no plano é inscrito dentro do arco:

$$y = -127.7 \text{ ft} \cdot \cosh(x/127.7 \text{ ft}) + 757.7 \text{ ft}.$$

3.1.4 Exercícios

Exercício* 3.1.4*: *Mostre que* $x = e^{4t}$ *é uma solução de* $x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 0$.

Exercício* 3.1.5*: *Mostre que* $x = e^{t}$ *não é uma solução de* $x''' - 12x'' + 48x' - 64x = 0$.

Exercício* 3.1.6*: $y = \operatorname{sen} t$ *é uma solução de* $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - y^2$*? Justifique sua resposta.*

Exercício* 3.1.7*: *Seja* $y'' + 2y' - 8y = 0$. *Agora tente uma solução da forma* $y = e^{rx}$ *para alguma constante (desconhecida) r. Isto é uma solução para algum r? Se é, ache todos tais r.*

Exercício* 3.1.8*: *Verifique que* $x = Ce^{-2t}$ *é uma solução de* $x' = -2x$*. Determine* C *para satisfazer a condição inicial* $x(0) = 100$*.*

Exercício* 3.1.9*: *Verifique que* $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ *é uma solução de* $x'' - x' - 2x = 0$*. Determine* C_1 *e* C_2 *para satisfazer as condições iniciais* $x(0) = 10$ *e* $x'(0) = 0$*.*

Exercício* 3.1.10*: *Determine uma solução de* $(x')^2 + x^2 = 4$ *usando seus conhecimentos de derivadas de funções que você têm de Cálculo básico.*

Exercício* 3.1.11*: *Resolve:*

a) $\dfrac{dA}{dt} = -10A, \ A(0) = 5.$

b) $\dfrac{dH}{dx} = 3H, \ H(0) = 1.$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

d) $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -9x, \ x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$

Note: Exercícios com números 101 e acima têm soluções no final do livro.

Exercício* 3.1.101*: *Mostre que* $x = e^{-2t}$ *é uma solução de* $x'' + 4x' + 4x = 0$*.*

Exercício* 3.1.102*: $y = x^2$ *é uma solução de* $x^2y'' - 2y = 0$*? Justifique sua resposta.*

Exercício* 3.1.103*: *Seja* $xy'' - y' = 0$*. Tente uma solução da forma* $y = x^r$*. Isto é uma solução para algum* r*? Se é, ache todos tais* r*.*

Exercício* 3.1.104*: *Verifique que* $x = C_1e^t + C_2$ *é uma solução de* $x'' - x' = 0$*. Determine* C_1 *e* C_2 *tal que* x *satisfaça* $x(0) = 10$ *e* $x'(0) = 100$*.*

Exercício* 3.1.105*: *Resolva* $\frac{d\varphi}{ds} = 8\varphi$ *e* $\varphi(0) = -9$*.*

3.2 Integrais como soluções

Note: abrangido em §1.2 e §2.1 em [BD]

Uma EDO de primeira ordem é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

ou simplesmente

$$y' = f(x,y).$$

Geralmente não existe uma fórmula simples ou um procedimento que nós podemos seguir para achar soluções. Nas próximas páginas vamos considerar casos especiais onde não é dificil obter soluções. Nesta seção suponhamos que f seja uma função somente de x, isto é, a equação seja

$$y' = f(x). \tag{3.2}$$

Nós simplesmente poderíamos integrar (antiderivar) ambos os lados em relação a x.

$$\int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C,$$

isto é

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

Este $y(x)$ de fato é a solução geral. Então para resolver (3.2), nós achamos alguma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ e depois nós adicionamos uma constante arbitrária para obter a solução geral.

Agora é um bom momento para discutir um aspecto de notação e terminologia em Cálculo. Livros de Cálculo turvam as águas falando da integral principalmente como a chamada integral indefinida. A integral indefinida de fato é a *primitiva* (quer dizer, toda a família de primitivas). De fato existe somente uma integral e esta é a integral definida. A única razão para a notação da integral indefinida é que nós sempre podemos escrever a primitiva como uma integral (definida). Isto é, pelo Teorema Fundamental do Cálculo nós sempre podemos escrever $\int f(x)\,dx + C$ como

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Portanto, a terminologia *integrar* quando nós de fato queremos dizer *antiderivar*. Integração é só um jeito de calcular a primitiva (e elas é um jeito que sempre funciona, veja os seguintes exemplos). Integração é por definição a área debaixo do gráfico, mas acontece que ela também calcula primitivas. Por razões de coerência, nós vamos continuar usando a notação de integral indefinida quando queremos uma primitiva, e você *sempre* devia pensar na integral definida.

Exemplo 3.2.1: Determine a solução geral de $y' = 3x^2$.

Cálculo elementar nos diz que a solução geral tem de ser $y = x^3 + C$. Vamos verificar: $y' = 3x^2$. Nós obtemos *exatamente* nossa equação original.

Normalmente, nós também temos um condição inicial como $y(x_0) = y_0$ para dois números x_0 e y_0 (x_0 normalmente é 0, mas não sempre). Neste caso podemos escrever a solução como uma integral definida de uma maneira bonita. Suponhamos que nosso problema seja $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$. Então a solução é

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + y_0. \tag{3.3}$$

Vamos checar! Nós calculamos $y' = f(x)$ (pelo Teorema Fundamental do Cálculo) e y é uma solução. Ele é a solução que satisfaz a condição inicial? Bem, $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\, dx + y_0 = y_0$. Ele é!

Note que a integral definida e a integral indefinida (primitiva) são bestas completamente diferentes. A integral definida sempre dá um número. Portanto, (3.3) é uma fórmular que nós podemos colocar em uma calculadora or um computador, e eles vão ficar felizes calculando valores específicos para nós. Nós vamos facilmente poder plotar a solução e trabalhar com ela como com qualquer outra função. Não é tão crucial sempre achar a forma fechada para a primitiva.

Exemplo 3.2.2: Resolve

$$y' = e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1.$$

Pela discussão anterior, a solução tem de ser

$$y(x) = \int_0^x e^{-s^2}\, ds + 1.$$

Aqui é um ótimo jeito de zombar dos seus amigos no Cálculo do segundo semestre. Peça para eles acharem a solução na forma fechada. Ha ha ha (má piada matemática). Não é possível (em forma fechada). Não tem nada de errado em escrever a solução como uma integral definida. Esta integral particular de fato é muito importante na estatística.

Usando este método, nós sempre podemos resolver equações da forma

$$y' = f(y).$$

Escrevamos a equação na notação de Leibniz.

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Agora supomos $f(y) \neq 0$ e usamos o Teorema da Função Inversa de Cálculo para trocar os papéis de x e y e obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}.$$

O que estamos fazendo parece com álgebra com dx e dy. É tentador simplesmente fazer álgebra com dx e dy como se eles fossem números. E neste caso isso funciona. (Porém, tome cuidado, pois este tipo de cálculo pode levar a problemas, em particular quando tem mais que uma variável independente.) Neste ponto podemos simplesmente integrar,

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C.$$

Finalmente, tentamos calcular y.

Exemplo 3.2.3: Anteriormente, nós adivinhamos que $y' = ky$ (para algum $k > 0$) tem a solução $y = Ce^{kx}$. Agora podemos achar a solução sem adivinhar. Primeiro notamos que $y = 0$ é uma solução. Depois, supomos $y \neq 0$. Escrevemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{ky}.$$

Integramos para obter

$$x(y) = x = \frac{1}{k} \ln |y| + D,$$

onde D é uma constante qualquer. Agora calculamos y (de fato, $|y|$).

$$|y| = e^{kx-kD} = e^{-kD} e^{kx}.$$

Se nós substituimos e^{-kD} por uma constante qualquer C, podemos nos livrar das barras do módulo (podemos fazer isso pois D foi arbitrário). Desse jeito também podemos incorporar a solução $y = 0$. Nós obtemos a mesma solução geral que adivinhamos antes, $y = Ce^{kx}$.

Exemplo 3.2.4: Determine a solução geral de $y' = y^2$.

Primeiro notamos que $y = 0$ é uma solução. Agora podemos supor que $y \neq 0$. Escrevemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Integramos para obter

$$x = \frac{-1}{y} + C.$$

Calculamos $y = \frac{1}{C-x}$. Portanto, a solução geral é

$$y = \frac{1}{C - x} \qquad \text{or} \qquad y = 0.$$

Note as singularidades da solução. Se por exemplo $C = 1$, então a solução "explode" enquanto abordamos $x = 1$. Geralmente, é dificil dizer simplesmente olhando à equação mesmo como a solução vai se comportar. A equação $y' = y^2$ é muito bonita e definida em toda parte, mas a solução é definida somente em algum intervalo $(-\infty, C)$ ou (C, ∞).

Problemas clássicos levando a equações diferenciais que podem ser resolvidas por integração são problemas de velocidade, aceleração e distância. Você provavelmente já viu estes problemas antes nas suas outras classes de Cálculo.

Exemplo 3.2.5: Suponhamos que um carro tenha uma velocidade de $e^{t/2}$ metros por segundo, onde t seja o tempo em segundos. Até onde o carro chegou em 2 segundos (partindo em $t = 0$)? Até onde em 10 segundos?

x denote a distância que o carro percorreu. A equação é

$$x' = e^{t/2}.$$

Nós simplesmente podemos integrar esta equação para obter

$$x(t) = 2e^{t/2} + C.$$

Nós ainda temos de determinar C. Sabemos que no instante $t = 0$ temos $x = 0$. Isto é, $x(0) = 0$. Então

$$0 = x(0) = 2e^{0/2} + C = 2 + C.$$

Portanto $C = -2$ e

$$x(t) = 2e^{t/2} - 2.$$

Agora simplesmente colocamos nossos valores de t na equação acima para determinar onde o carro está em 2 e em 10 segundos. Obtemos

$$x(2) = 2e^{2/2} - 2 \approx 3.44 \text{ metros}, \qquad x(10) = 2e^{10/2} - 2 \approx 294 \text{ metros}.$$

Exemplo 3.2.6: Suponhamos que o carro acelere com uma taxa de t^2 m/s². No instante $t = 0$ o carro está na marca de 1 metro e está viajando com 10 m/s. Onde o carro está no instante $t = 10$?

Bem, isso de fato é um problema de segunda ordem. Se x é a distância percorrida, então x' é a velocidade, e x'' é a aceleração. A equação com condições iniciais é

$$x'' = t^2, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 10.$$

O que acontece se escrevemos $v = x'$? Assim temos o problema

$$v' = t^2, \qquad v(0) = 10.$$

Uma vez que calculamos v, podemos integrar e determinar x.

Exercício* 3.2.1*: *Calcule v, depois calcule x. Determine $x(10)$ para responder à questão original.*

3.2.1 Exercícios

Exercício* 3.2.2*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = x^2 + x$ *para* $y(1) = 3$.

Exercício* 3.2.3*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(5x)$ *para* $y(0) = 2$.

Exercício* 3.2.4*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-1}$ *para* $y(0) = 0$.

Exercício* 3.2.5*: *Resolva* $y' = y^3$ *para* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.2.6** (um pouco mais dificil):*** *Resolva* $y' = (y-1)(y+1)$ *para* $y(0) = 3$.

Exercício* 3.2.7*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+1}$ *para* $y(0) = 0$.

Exercício* 3.2.8*: *Resolva* $y'' = \operatorname{sen} x$ *para* $y(0) = 0$.

Exercício* 3.2.9*: *Uma nave espacial está viajando com a velocidade* $2t^2 + 1\ {}^{km}\!/\!_{s}$ *(t é tempo em segundos). Ele está apontando em direção oposta à Terra e no instante* $t = 0$ *fica 1000 quilômetros da Terra. Qual a distância dela da Terra um minuto depois do instante* $t = 0$*?*

Exercício* 3.2.10*: *Resolva* $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(t^2) + t$, $x(0) = 20$. *Você pode deixar sua resposta como uma integral definida.*

Exercício* 3.2.101*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = e^x + x$ *e* $y(0) = 10$.

Exercício* 3.2.102*: *Resolva* $x' = \frac{1}{x^2}$, $x(1) = 1$.

Exercício* 3.2.103*: *Resolva* $x' = \frac{1}{\cos(x)}$, $x(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercício* 3.2.104*: *Sid está num carro dirigindo com uma velocidade de* $10t + 70$ *milhas por hora saindo de Las Vegas, onde t é em horas. No instante* $t = 0$ *Sid está 10 milhas de Vegas. Qual a distância 2 horas depois?*

3.3 Campos de Direção

Note: §1.1 em [BD]

Agora talvez seja uma boa ideia primeiro tentar o IODE Lab I ou Project I do website de IODE (em inglês): `http://www.math.uiuc.edu/iode/`. Uma alternativa simples que você pode usar diretamente no seu browser é o "MIT Mathlet Isoclines": `http://math.mit.edu/daimp/Isoclines.html`.

Como nós já observamos, a equação geral de primeira ordem que estudamos pode ser escrita na seguinte forma (forma normal!):

$$y' = f(x,y).$$

Geralmente não podemos simplesmente resolver este tipo de equações explicitamente. Seria bom se poderíamos pelo menos descobrir a forma e o comportamento das soluções, ou se poderíamos até achar soluções aproximadas para qualquer equação.

3.3.1 Campos de direção

Como você podia ver usando um dos programas acima, a equação $y' = f(x,y)$ dá em cada ponto uma inclinação no plano (x,y). Podemos plotear a inclinação em muitos pontos como uma curta linha passando pelo ponto (x,y) com a inclinação $f(x,y)$. Veja Figura 3.3.

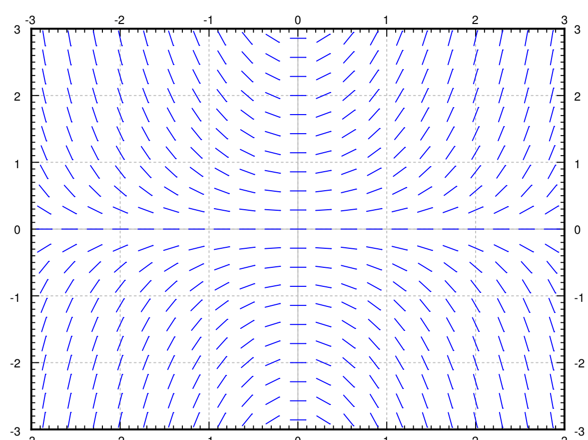


Figura 3.3: Campo de direção de $y' = xy$.

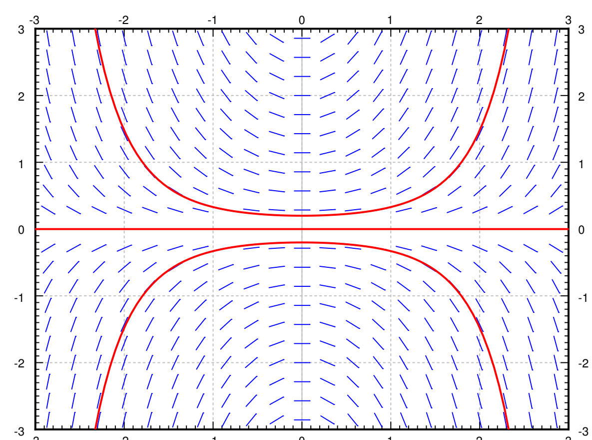


Figura 3.4: Campo de direção de $y' = xy$ com os gráficos das soluções satisfazendo $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, and $y(0) = -0.2$.

Nós chamamos esta imagem o *campo de direção* da equação. Dada alguma condição específica $y(x_0) = y_0$, podemos olhar para a localização (x_0,y_0) e seguir a inclinação. Veja Figura 3.4.

Considerando o campo de direção, obtemos muitas informações sobre o comportamento de soluções. Por exemplo, na Figura 3.4 podemos ver o que as soluções fazem quando as condições iniciais são $y(0) > 0$, $y(0) = 0$ e $y(0) < 0$. Note que uma pequena mudança da condição inicial causa um comportamento bem diferente. Do outro lado, plotear algumas soluções da equação $y' = -y$, observamos que independentemente do valor de $y(0)$, todas as soluções convergem para zero quando x vai para infinito. Veja Figura 3.5.

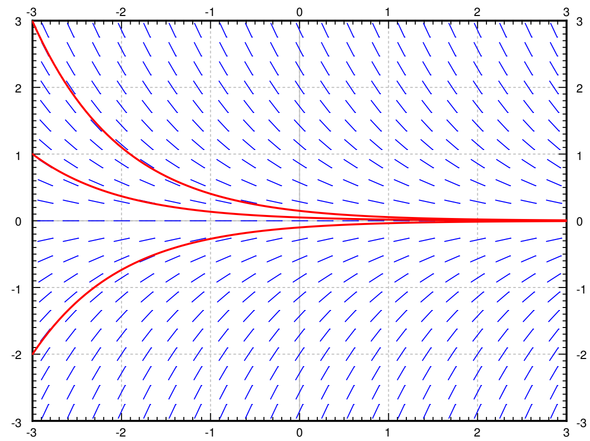


Figura 3.5: Campo de direção de $y' = -y$ com os gráficos de algumas soluções.

3.3.2 Existência e unicidade

Nós queriamos considerar duas perguntas fundamentais sobre o problema

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(i) Uma solução *existe*?

(ii) A solução é *única* (se ela existe)?

O que você acha vai ser a resposta? A resposta parece ser sim para as duas, não é? Bem, mais ou menos. Mas existem casos quando a resposta a qualquer pergunta pode ser não.

Como geralmente as equações que encontramos em aplicações vêm de situações da vida real, parece lógico que a solução sempre existe. Também tem de ser única se acreditamos que nosso universo é determinista. Se a solução não existe, ou se ela não é única, provavelmente não elaboramos o modelo correto. Portanto, é bom saber quando as coisas podem correr mal e porquê.

Exemplo 3.3.1: Tente resolver:

$$y' = \frac{1}{x}, \qquad y(0) = 0.$$

Integre para determinar a solução geral $y = \ln|x| + C$. Note que a solução não existe em $x = 0$. Veja Figura 3.6.

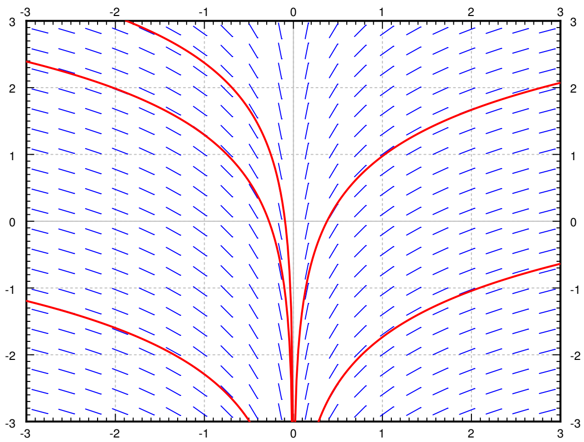


Figura 3.6: Campo de direção de $y' = 1/x$.

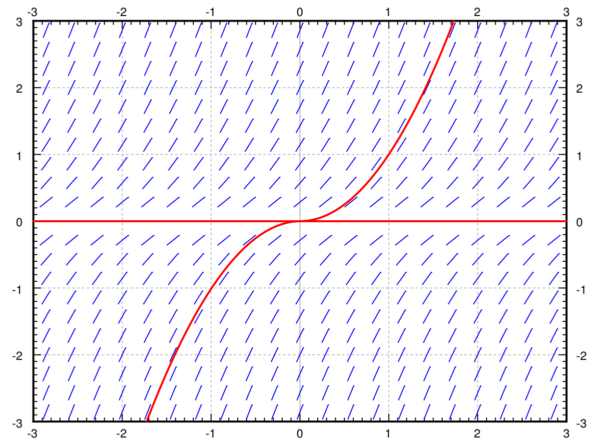


Figura 3.7: Campo de direção de $y' = 2\sqrt{|y|}$ com duas soluções satifazendo $y(0) = 0$.

Exemplo 3.3.2: Resolva:

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0.$$

Veja Figura 3.7. Note que $y = 0$ é uma solução. Mas também a função

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

De fato é dificil dizer olhando para o campo de direção que a solução não vai ser única. Ainda tem esperança? Lógico que tem. Acontece que o seguinte teorema vale. Ele é chamado Teorema de Picard*.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Picard's sobre existência e unicidade)**.** *Se $f(x,y)$ é contínua (como função de duas variáveis) e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe e é continua perto de algum (x_0,y_0), então a solução a*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

existe (pelo meno para algum pequeno intervalo de x's) e é única.

Note que os problemas $y' = 1/x$, $y(0) = 0$ e $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ não satisfazem a hipótese do teorema. Até se podemos aplicar o teorema, deviamos tomar cuidado com este negócio de existência. É bem possível que a solução existe somente para muito pouco tempo.

*nomeado pelo matemático francês Charles Émile Picard (1856 – 1941)

Exemplo 3.3.3: Para alguma constante A, resolve:

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A.$$

Nós sabemos como resolver esta equação. Primeiro suponha que $A \neq 0$, portanto y não é igual a zero pelo menos para algum x perto de 0. Portanto $x' = 1/y^2$, logo $x = -1/y + C$, portanto $y = \frac{1}{C-x}$. Se $y(0) = A$, então $C = 1/A$ e

$$y = \frac{1}{1/A - x}.$$

Se $A = 0$, então $y = 0$ é uma solução.

Por exemplo, para $A = 1$ a solução "explode" em $x = 1$. Portanto, a solução não existe para todos os x até se a equação é bonita em toda parte. A equação $y' = y^2$ sem dúvida parece bonita.

Para a maioria deste curso vamos nos interessar por equações onde existência e unicidade valem, e de fato valem "globalmente" contrariamente ao exemplo da equação $y' = y^2$.

3.3.3 Exercícios

Exercício* 3.3.1*: *Desenhe o campo de direção para $y' = e^{x-y}$. Qual o comportamente das soluções para x crescente? Você consegue adivinhar uma solução particular olhando para o campo de direção?*

Exercício* 3.3.2*: *Desenhe o campo de direção para $y' = x^2$.*

Exercício* 3.3.3*: *Desenhe o campo de direção para $y' = y^2$.*

Exercício* 3.3.4*: *É possível resolver a equação $y' = \frac{xy}{\cos x}$ para $y(0) = 1$? Justifique sua resposta.*

Exercício* 3.3.5*: *É possível resolver a equação $y' = y\sqrt{|x|}$ para $y(0) = 0$? A solução é única? Justifique sua resposta.*

Exercício* 3.3.101*: *Desenha o campo de direção de $y' = y^3$. Você consegue visualmente achar a solução que satisfaz $y(0) = 0$?*

Exercício* 3.3.102*: *É possível resolver $y' = xy$ para $y(0) = 0$? A solução é única?*

Exercício* 3.3.103*: *É possível resolver $y' = \frac{x}{x^2-1}$ para $y(1) = 0$?*

3.4 Equações separáveis

Note: §2.2 em [BD]

Quando uma equação diferencial é da forma $y' = f(x)$, nós simplesmente podemos integrar: $y = \int f(x)\,dx + C$. Infelizmente este método não funciona mais para a forma geral da equação $y' = f(x,y)$. Integrar ambos os lados dá

$$y = \int f(x,y)\,dx + C.$$

Note a dependência de y na integral.

3.4.1 Equações separáveis

Suponhamos que a equação seja *separável*. Isto é, vamos considerar

$$y' = f(x)g(y),$$

para algumas funções $f(x)$ e $g(y)$. Escrevamos a equação na notação de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

e reescrevemos a equação como

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Agora ambos os lados parecem algo que podemos integrar. Obtemos

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Se conseguimos achar expressões em forma fechada para estas duas integrais, talvez possamos calcular y.

Exemplo 3.4.1: Considere a equação

$$y' = xy.$$

Primeiro note que $y = 0$ é uma solução, então suponha $y \neq 0$ a partir de agora. Escreva a equação como $\frac{dy}{dx} = xy$, então

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx + C.$$

Calculamos as primitivas e obtemos

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

Ou

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}}e^C = De^{\frac{x^2}{2}},$$

onde $D > 0$ é alguma constante. Como $y = 0$ é uma solução e devido ao módulo no lado esquerdo, de fato podemos escrever

$$y = De^{\frac{x^2}{2}},$$

para qualquer número D (incluindo zero e números negativos).

Verificamos:

$$y' = Dxe^{\frac{x^2}{2}} = x\left(De^{\frac{x^2}{2}}\right) = xy.$$

Yay!

Deviamos tomar um pouco mais cuidado com este método. Você podia se preocupar que integramos em relação a duas variáveis. Pareceu que estavamos fazendo uma operação diferente em cada lado. Vamos analisar este método dum jeito mais rígido.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Reescrevemos a equação como se segue. Note que $y = y(x)$ é uma função de x, assim como $\frac{dy}{dx}$!

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Integramos ambos os lado em relação a x.

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx + C.$$

Podemos usar a fórmula de substituição.

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

E pronto.

3.4.2 Soluções Implícitas

É claro que às vezes podemos ficar presos até se podemos fazer a integração. Por exemplo, considere

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

Separamos variáveis,

$$\frac{y^2+1}{y}\,dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)dy = x\,dx.$$

Integramos para obter

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C,$$

e a expressão talvez mais simples (onde $D = 2C$)

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + D.$$

Não é fácil achar a solução explícita porque é dificil calcular y. Portanto, vamos deixar a solução nesta forma. Ela é uma *solução implícita*. Ainda é fácil verificar que uma solução implícita satisfaz a equação diferencial. Neste caso derivamos para obter

$$y'\left(2y + \frac{2}{y}\right) = 2x.$$

É fácil ver que vale a equação diferencial. Se quer calcular valores para y, você vai ter de aplicar um artifício. Por exemplo pode plotear x como função em y, e depois virar sua folha. Computadores também sabem aplicar alguns destes artifícios mas você tem de tomar cuidado.

Notamos acima que a equação também tem uma solução $y = 0$. Neste caso acontece que a solução geral é $y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C$ junto com $y = 0$. Estas soluções periféricas como $y = 0$ às vezes são chamadas *soluções singulares*.

3.4.3 Exemplos

Exemplo 3.4.2: Resolva $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$, $y(1) = 0$.

Primeiro fatoramos o lado direito e obtemos

$$x^2y' = (1 - x^2)(1 + y^2).$$

Separamos variáveis, integramos e calculamos y

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1-x^2}{x^2}, \\
\frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1}{x^2} - 1, \\
\arctan(y) &= \frac{-1}{x} - x + C, \\
y &= \tan\left(\frac{-1}{x} - x + C\right).
\end{aligned}$$

Agora resolva com a condição inicial $0 = \tan(-2 + C)$ para obter $C = 2$ (ou $2 + \pi$, etc. . .). A solução que estamos procurando, portanto, é

$$y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + 2\right).$$

Exemplo 3.4.3: Suponha que Bob tenha feito uma xícara de café e a água estava fervendo (100 graus Celsius) no instante $t = 0$ minutos. Suponha que Bob goste de beber seu café a 70 graus. A temperatura ambiente (do quarto) seja 26 graus. Além disso, suponha que Bob tenha medido a temperatura no instante $t = 1$ minuto e observou que ela tinha baixado para 95 graus. Quando Bob devia começar a beber?

Seja T a temperatura do café, seja A a temperatura ambiente. Então para algum k a temperatura do café é:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T).$$

Para nossa situação $A = 26$, $T(0) = 100$, $T(1) = 95$. Separamos variáveis e integramos (C e D vão denotar constantes arbitrárias)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T - A}\,\frac{dT}{dt} &= -k, \\
\ln(T - A) &= -kt + C, \text{(note que } T - A > 0) \\
T - A &= D\,e^{-kt}, \\
T &= D\,e^{-kt} + A.
\end{aligned}$$

Isto é, $T = 26 + D\,e^{-kt}$. Colocamos a primeira condição $100 = T(0) = 26 + D$ e portanto $D = 74$. Obtemos $T = 26 + 74\,e^{-kt}$. Colocamos $95 = T(1) = 26 + 74\,e^{-k}$. Calculamos k e obtemos $k = -\ln\frac{95-26}{74} \approx 0{,}07$. Agora calculamos o instante t que dá a temperatura de 70 graus. Isto é, escrevemos $70 = 26 + 74e^{-0{,}07t}$ para obter $t = -\frac{\ln\frac{70-26}{74}}{0{,}07} \approx 7{,}43$ minutos. Então Bob pode começar a beber o café mais ou menos 7 minutos e meio depois de fazê-lo. Provavelmente mais ou menos o tempo que demorou para calcular quanto tempo ia demorar.

Exemplo 3.4.4: Determine a solução geral de $y' = \frac{-xy^2}{3}$ (incluindo soluções singulares).

Primeiro note que $y = 0$ é uma solução (uma solução singular). Então suponha que $y \neq 0$ e escreva

$$\begin{aligned}
\frac{-3}{y^2}y' &= x, \\
\frac{3}{y} &= \frac{x^2}{2} + C, \\
y &= \frac{3}{x^2/2 + C} = \frac{6}{x^2 + 2C}.
\end{aligned}$$

3.4.4 Exercícios

Exercício* 3.4.1*: *Resolva* $y' = x/y$.

Exercício* 3.4.2*: *Resolva* $y' = x^2 y$.

Exercício* 3.4.3*: *Resolva* $\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)\, t$*, para* $x(0) = 0$.

Exercício* 3.4.4*: *Resolva* $\frac{dx}{dt} = x \operatorname{sen}(t)$*, para* $x(0) = 1$.

Exercício* 3.4.5*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$. *Dica: Fatore o lado direito.*

Exercício* 3.4.6*: *Resolva* $xy' = y + 2x^2y$*, onde* $y(1) = 1$.

Exercício* 3.4.7*: *Resolva* $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2+1}$*, para* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.4.8*: *Determine uma solução implícita de* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y^2+1}$*, para* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.4.9*: *Determine uma solução explícita de* $y' = xe^{-y}$*,* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.4.10*: *Determine uma solução explícita de* $xy' = e^{-y}$*, para* $y(1) = 1$.

Exercício* 3.4.11*: *Determine uma solução explícita de* $y' = ye^{-x^2}$*,* $y(0) = 1$. *Você pode deixar sua resposta na forma duma integral definida.*

Exercício* 3.4.12*: *Suponha que uma xícara de café tenha 100 graus Celsius no instante* $t = 0$*, que tenha 70 graus em* $t = 10$ *minutes, e que tenha 50 graus no instante* $t = 20$ *minutos. Calcule a temperatura ambiente.*

Exercício* 3.4.101*: *Resolva* $y' = 2xy$.

Exercício* 3.4.102*: *Resolva* $x' = 3xt^2 - 3t^2$*,* $x(0) = 2$.

Exercício* 3.4.103*: *Determine uma solução implícita de* $x' = \frac{1}{3x^2+1}$*,* $x(0) = 1$.

Exercício* 3.4.104*: *Determine uma solução explícita de* $xy' = y^2$*,* $y(1) = 1$.

3.5 Equações exatas

Nesta seção consideramos equações diferenciais da forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{3.4}$$

Usando a notação de Leibniz, podemos escrever essa equação na forma $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ ou $M(x,y)\,dx + N\,dy = 0$. (A última forma é chamada *forma diferencial* de (3.4).)

A equação (3.4) (ou as outras equações equivalentes) é chamada *exata* se existe uma função u ("função potencial") (de x e y) tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = N. \tag{3.5}$$

(Note a analogia à definição duma função potencial para uma campo vetorial em dimensão dois.) Se M e N são continuamente deriváveis, o Teorema de Clairaut-Schwarz sobre as segundas derivadas de u implica

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Esta relação é chamada *critério de integrabilidade*, porque ela implica que, dada (3.4), podemos tentar integrar M (por exemplo) para obter uma função u satisfazendo (3.5) (veja exemplo abaixo).

Agora seja u uma função que satisfaz (3.5). Se y é alguma função tal que a função $x \mapsto u(x,y(x))$ é constante, então para todo x no domínio de y,

$$0 = \frac{du}{dx}(x,y(x)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y(x))y'(x) = M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x)$$

pela Regra da Cadeia, i.e., y é uma solução (explícita) de (3.4). Reciprocamente, o mesmo cálculo mostra que se y é uma solução de (3.4), então a função $x \mapsto u(x,y(x))$ é constante. Em outras palavras, a relação $u(x,y) + C = 0$ (com C algum número real) dá uma solução implícita de (3.4).

Exemplo 3.5.1: Consideramos a equação

$$(x + 2y)x\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0. \tag{3.7}$$

Note que $M(x,y) = (x + 2y)x$, $N(x,y) = x^2 - y^2$ satisfazem o critério de integrabilidade:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Agora calculamos u: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = (x + 2y)x$ e portanto

$$u(x,y) = \int (x + 2y)x\,dx + g(y) = \frac{x^3}{3} + yx^2 + g(y).$$

Derivando em relação a y, obtemos

$$g'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - x^2 = N(x,y) - x^2 = x^2 - y^2 - x^2 = -y^2$$

e portanto podemos escolher $g(y) = -\frac{y^3}{3}$ para obter a função u que satisfaz (3.5):

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + yx^2 - \frac{y^3}{3}$$

Segundo nossa argumentação acima, isso implica que soluções implícitas de (3.7) são dadas por

$$0 = u(x,y) + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} + C$$

com C qualquer número real.

Exemplo 3.5.2: Um exemplo mais simples (que também poderiamos resolver usando separação de variáveis) é dado pela equação

$$xy^2 + x^2yy' = 0.$$

Aqui $M(x,y) = xy^2$ e $N(x,y) = x^2y$ satisfazem o critério de integrabilidade

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

e não é difícil adivinhar (ou calcular) a função potencial $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$. Portanto, as soluções implícitas da EDO são dadas por $x^2y^2 + C = 0$.

Se consideramos uma condição inicial como $y(1) = 2$, obtemos $-C = 1 \cdot y(1)^2 = 4$, e a solução explícita deste problema de valor inicial é $y(x) = 2/x$ (com domínio $(0,\infty)$).

Até se nossa equação (3.4) não for exata, podemos tentar achar uma função r tal que $r(x,y)M(x,y)+r(x,y)N(x,y) = 0$ é exata e usar as soluções implícitas desta equação para achar soluções de (3.4). Um caso especial onde isso sempre é possível vai ser apresentado na seguinte seção.

3.6 Equações lineares e o fator integrante

Note: §2.1 in [BD]

Um dos tipos mais importantes de equações diferenciais que vamos aprender a resolver são as chamadas *equações lineares*. De fato, a maioria do curso vai se concentrar em equações lineares. Nesta aula vamos nos concentrar em *equações lineares de primeira ordem*. Uma equação de primeira ordem é linear se ela pode ser escrita na seguinte forma:

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{3.8}$$

Aqui a palavra "linear" significa linear em y e y'; nenhuma potência maior nem funções em y ou y' aparecem. A dependência de x pode ser mais complicada.

Soluções de equações lineares têm propriedades agradáveis. Por exemplo, a solução existe onde $p(x)$ e $f(x)$ são definidos e tem a mesma regularidade (quer dizer: é igualmente agradável). Mas mais importante para nós no momento: existe um método para resolver equações lineares de primeira ordem.

Primeiro determinamos uma função $r(x)$ tal que

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big]. \tag{3.9}$$

Depois podemos multiplicar ambos os lados de (3.8) por $r(x)$ para obter

$$\frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big] = r(x)f(x).$$

Agora integramos ambos os lados. O lado direito não depende de y e o lado esquerdo está escrito como uma derivada duma função. Depois calculamos y. A função $r(x)$ é chamada o *fator integrante* e o método é chamado o *método do fator integrante*.

Observe que (3.9) implica $r(x)y' + r(x)p(x)y = r(x)y' + r'(x)y$. Portanto, estamos procurando uma função $r(x)$, tal que se nós a derivamos, obtemos a mesma função multiplicada por $p(x)$. Isso parece uma tarefa para a função exponencial! Seja

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
y' + p(x)y &= f(x), \\
e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\
\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\
e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C, \\
y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C\right).
\end{aligned}$$

Naturalmente, para obter uma fórmula de forma fechada para y, temos de achar uma fórmula de forma fechada para as integrais acima.

Exemplo 3.6.1: Resolva

$$y' + 2xy = e^{x-x^2}, \qquad y(0) = -1.$$

Primeiro note que $p(x) = 2x$ e $f(x) = e^{x-x^2}$. O fator integrante é $r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$. Multiplicamos ambos os lados da equação por $r(x)$ para obter

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x-x^2}e^{x^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = e^x.$$

Integramos:

$$e^{x^2}y = e^x + C,$$
$$y = e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}.$$

Em seguida, resolvemos para a condição inicial $-1 = y(0) = 1 + C$, portanto $C = -2$. A solução é

$$y = e^{x-x^2} - 2e^{-x^2}.$$

Note que não importa qual primitiva usamos quando calculamos $e^{\int p(x)dx}$. Sempre pode-se adicionar uma constante de integração, mas essas constantes não vão importar no final.

Exercício* 3.6.1*: *Tente! Adicione uma constante de integração à integral no fator integrante e mostre que a solução final é a mesma que a solução acima.*

Uma dica: Não tente memorizar a fórmula mesma, isso é muito dificil. É mais fácil memorizar o procedimento e repeti-lo.

Como não sempre podemos calcular as integrais numa forma fechada, é útil saber como escrever a solução na forma duma integral definida. Uma integral definida é algo que você pode digitar num computador ou numa calculadora. Suponha que tenha o problema

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Olhe para a solução e escreva as integrais como integrais definidas

$$\boxed{y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds} f(t)\,dt + y_0\right).} \tag{3.10}$$

Você devia tomar cuidado para usar variáveis fictícias corretamente aqui. Se você digita uma tal fórmula no seu computador ou na sua calculadora, ele vai querer dar respostas numéricas.

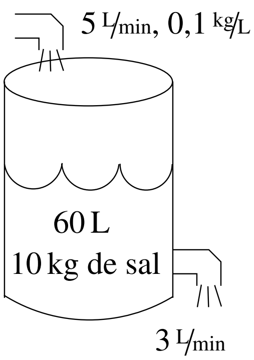
Exercício 3.6.2: *Verifique que* $y(x_0) = y_0$ *na fórmula* (3.10).

Exercício 3.6.3: *Escreva a solução do seguinte problema como uma integral definida, mas tente simplificar tanto quanto puder. Você não vai poder dar a solução em forma fechada.*

$$y' + y = e^{x^2 - x}, \qquad y(0) = 10.$$

Observação 3.6.1: Antes de continuar, deviamos observar algumas propriedades interessantes de equações lineares. Primeiro, para o problema de valor inicial linear $y' + p(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, sempre existe uma fórmula explícita (3.10) para a solução. Segundo, segue da fórmula (3.10) que se $p(x)$ e $f(x)$ são contínuas em algum intervalo (a,b), então a solução $y(x)$ existe e é derivável em (a,b). Compare com o exemplo não-linear simples que vimos anteriormente, $y' = y^2$, e compare com Teorema 3.3.1.

Exemplo 3.6.2: Vamos discutir uma aplicação simples comum de equações lineares. Este tipo de problema é usado frequentemente na vida real. Por exemplo, equações lineares são usadas no cálculo da concentração de substâncias químicas em água (rios e lagos).



Um tanque de 100 litros contém 10 quilos de sal dissolvido em 60 litros de água. Uma solução de água e sal (salmoura) com concentração de 0,1 quilos por litro está entrando com taxa de 5 litros por minuto. A solução no tanque é misturado bem e sai com taxa de 3 litros por minuto. Quanto sal tem no tanque quando o tanque está cheio?

Vamos elaborar uma equação. x denote os quilos de sal no tanque, t denote o tempo em minutos. Então para uma mudança pequena Δt no tempo, a mudança em x (denotada por Δx) é mais ou menos

$$\begin{aligned} \Delta x \approx & (\text{taxa entrando} \times \text{concentração entrando})\Delta t \\ & - (\text{taxa saindo} \times \text{concentração saindo})\Delta t. \end{aligned}$$

Dividino por Δt e calculando o limite $\Delta t \to 0$, vemos que

$$\frac{dx}{dt} = (\text{taxa entrando} \times \text{concentração entrando}) - (\text{taxa saindo} \times \text{concentração saindo}).$$

No nosso exemplo temos

$$\begin{aligned} \text{taxa entrando} &= 5, \\ \text{concentração entrando} &= 0{,}1, \\ \text{taxa saindo} &= 3, \\ \text{concentração saindo} &= \frac{x}{\text{volume}} = \frac{x}{60 + (5-3)t}. \end{aligned}$$

Portanto, nossa equação é

$$\frac{dx}{dt} = (5 \times 0{,}1) - \left(3 \frac{x}{60 + 2t}\right).$$

Ou na forma (3.8):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0{,}5. \tag{3.11}$$

Vamos resolver a equação. O fator integrante é

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60+2t}dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\ln(60+2t)\right) = (60+2t)^{3/2}.$$

Multiplicamos ambos os lados de (3.11) por $r(t)$ para obter

$$\begin{aligned}
(60+2t)^{3/2}\frac{dx}{dt} + (60+2t)^{3/2}\frac{3}{60+2t}x &= 0{,}5(60+2t)^{3/2}, \\
\frac{d}{dt}\left[(60+2t)^{3/2}x\right] &= 0{,}5(60+2t)^{3/2}, \\
(60+2t)^{3/2}x &= \int 0{,}5(60+2t)^{3/2}dt + C, \\
x &= (60+2t)^{-3/2}\int \frac{(60+2t)^{3/2}}{2}dt + C(60+2t)^{-3/2}, \\
x &= (60+2t)^{-3/2}\frac{1}{10}(60+2t)^{5/2} + C(60+2t)^{-3/2}, \\
x &= \frac{60+2t}{10} + C(60+2t)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Temos de achar C. Sabemos que no instante $t = 0$ temos $x = 10$. Então

$$10 = x(0) = \frac{60}{10} + C(60)^{-3/2} = 6 + C(60)^{-3/2},$$

ou

$$C = 4(60^{3/2}) \approx 1859{,}03.$$

Nós queremos saber x quando o tanque está cheio. Então observamos que o tanque está cheio quando $60 + 2t = 100$, ou quando $t = 20$. Portanto,

$$x(20) = \frac{60+40}{10} + C(60+40)^{-3/2} \approx 10 + 1859{,}03(100)^{-3/2} \approx 11{,}86.$$

A concentração no final é aproximadamente 0,1186 kg/litro e começamos com $1/6$ ou 0,167 kg/litro.

3.6.1 Exercícios

Nos exercícios você pode deixar a reposta como integral definida se não dá para achar uma solução em forma fechada. Se você consegue achar uma solução em forma fechada, devia dar essa.

Exercício* 3.6.4*: *Resolva* $y' + xy = x$.

Exercício* 3.6.5*: *Resolva* $y' + 6y = e^x$.

Exercício* 3.6.6*: *Resolva* $y' + 3x^2 y = \operatorname{sen}(x)\, e^{-x^3}$, *com* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.6.7*: *Resolva* $y' + \cos(x) y = \cos(x)$.

Exercício* 3.6.8*: *Resolva* $\frac{1}{x^2+1} y' + xy = 3$, *com* $y(0) = 0$.

Exercício* 3.6.9*: *Suponha que tenha dois lagos localizados ao longo dum córrego. Água limpa flue ao primeiro lago, depois a água do primeiro lago flue ao segundo lago, e depois água do segundo lago flue mais rio abaixo. O fluxo entrando e saindo de cada lago é 500 litros por hora. O segundo lago contém 100 mil litros de água e o segundo lago contém 200 mil litros de água. Um caminhão com 500 kg de substância tóxica cai ao primeiro lago. Suponha que a água esteja sendo misturada perfeitamente (e continuamente) pelo córrego. a) Determine a concentração da substância tóxica como função de tempo nos dois lagos. b) Quando a concentração no primeiro lago vai ser abaixo de 0,001 kg por litro? c) Quando a concentração no segundo lago vai ser máxima?*

Exercício* 3.6.10*: *A Lei de esfriamento de Newton diz que* $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$ *onde* x *é a temperatura,* t *é o tempo,* A *é a temperatura ambiente, e* $k > 0$ *é uma constante. Suponha que* $A = A_0 \cos(\omega t)$ *para algumas constantes* A_0 *e* ω. *Isto é, a temperatura ambiente oscila (por exemplo, temperaturas de noite e de dia). a) Determine a solução geral. b) No longo prazo, as condições iniciais vão fazer uma grande diferença? Porquê ou porquê não?*

Exercício* 3.6.11*: *Inicialmente 5 gramas de sal são dissolvidos em 20 litros de água. Salmoura com uma concentração de sal de 2 gramas por litro é adicionada com uma taxa de 3 litros por minuto. O tanque é misturado bem e drenado a 3 litros por minuto. Quanto tempo o processo tem de continuar para ter 20 gramas de sal no tanque?*

Exercício* 3.6.12*: *Inicialmente um tanque contém 10 litros de água pura. Salmoura de concentração desconhecida (mas constante) de sal está entrando com 1 litro por minuto. A água é misturada bem e drenada com 1 litro por minuto. 20 minutos depois do início tem 15 gramas de sal no tanque. Qual é a concentração de sal na salmoura original que estava entrando?*

Exercício* 3.6.101*: *Resolva* $y' + 3x^2 y = x^2$.

Exercício* 3.6.102*: *Resolva* $y' + 2\operatorname{sen}(2x) y = 2\operatorname{sen}(2x)$, $y(\pi/2) = 3$.

Exercício* 3.6.103*: *Suponha que um tanque de água esteja sendo bombeado a* $3\,\mathrm{L/min}$. *O tanque de água começa com* $10\,\mathrm{L}$ *de água limpa. Água com uma substância tóxica está fluindo ao tanque a* $2\,\mathrm{L/min}$, *com concentração de* $20t\,\mathrm{g/L}$ *no instante* t. *Quando o tanque está meio-vazio, quantos gramas da substância tóxica estão no tanque (assumindo mistura perfeita)?*

Exercício* 3.6.104*: *Suponha que tenha bactérias numa placa e que estamos adicionando gradualmente uma substância tóxica tal que a taxa de crescimento está diminuindo. Isto é, suponha que* $\frac{dP}{dt} = (2 - 0{,}1t)P$. *Se* $P(0) = 1000$, *determine a população no instante* $t = 5$.

3.7 Substituição

Como no caso de substituição em integrais, um método de resolver equações diferenciais é tentar mudar variáveis para obter uma equação mais simples.

3.7.1 Substituição

A equação

$$y' = (x - y + 1)^2$$

é nem separável nem linear. O que podemos fazer? Que tal tentar mudar variáveis tal que nas novas variáveis a equação é mais simples? Vamos usar uma outra variável v que vamos tratar como função de x. Vamos tentar

$$v = x - y + 1.$$

Temos de calcular y' em termos de v', v e x. Derivamos (em relação a x) para obter $v' = 1 - y'$. Então $y' = 1 - v'$. Colocamos isto na equação para obter

$$1 - v' = v^2.$$

Em outras palavras, $v' = 1 - v^2$. Sabemos como resolver uma tal equação.

$$\frac{1}{1 - v^2}\, dv = dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= x + C, \\ \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= e^{2x+2C}, \end{aligned}$$

ou $\frac{v+1}{v-1} = De^{2x}$ para alguma constante D. Note que $v = 1$ e $v = -1$ também são soluções.

Agora temos de "de-substituir" para obter

$$\frac{x - y + 2}{x - y} = De^{2x},$$

e também as duas soluções $x - y + 1 = 1$ ou $y = x$, e $x - y + 1 = -1$ ou $y = x + 2$. Resolvemos a primeira equação para y.

$$\begin{aligned} x - y + 2 &= (x - y)De^{2x}, \\ x - y + 2 &= Dxe^{2x} - yDe^{2x}, \\ -y + yDe^{2x} &= Dxe^{2x} - x - 2, \\ y\left(-1 + De^{2x}\right) &= Dxe^{2x} - x - 2, \\ y &= \frac{Dxe^{2x} - x - 2}{De^{2x} - 1}. \end{aligned}$$

Note que $D = 0$ dá $y = x + 2$, mas nenhum valor de D dá a solução $y = x$.

Substituição em equações diferenciais é aplicada mais ou menos do mesmo jeito que antes no Cálculo, e várias substituições diferentes podem funcionar. Tem algumas coisas gerais a observar, resumimos algumas delas numa tabela.

Quando vê	tente substituir
yy'	$v = y^2$
y^2y'	$v = y^3$
$(\cos y)y'$	$v = \operatorname{sen} y$
$(\operatorname{sen} y)y'$	$v = \cos y$
$y'e^y$	$v = e^y$

Normalmente tenta-se substituir a parte "mais complicada" da equação esperando simplificar ela. A tabela acima é somente uma regra geral. Talvez você tenha de modificar suas substituições. Se uma não funciona (i.e., ele não deixa a equação nem um pouco mais simples), tente uma outra.

3.7.2 Equações homogêneas

Um tipo de equação que podemos resolver por substituição são as chamadas *equações homogêneas*. Suponhamos que possamos escrever a equação diferencial como

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Aqui tentamos a substituição

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{e portanto} \qquad y' = v + xv'.$$

Observamos que a equação é transformada em

$$v + xv' = F(v) \qquad \text{ou} \qquad xv' = F(v) - v \qquad \text{ou} \qquad \frac{v'}{F(v) - v} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, uma solução implícita é

$$\int \frac{1}{F(v) - v}\, dv = \ln|x| + C.$$

Exemplo 3.7.1: Solve

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

Pomos a equação na forma $y' = (y/x)^2 + y/x$. Agora substituimos $v = y/x$ para obter a equação separável

$$xv' = v^2 + v - v = v^2,$$

que tem a solução

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{v^2}\,dv &= \ln|x| + C,\\ \frac{-1}{v} &= \ln|x| + C,\\ v &= \frac{-1}{\ln|x| + C}.\end{aligned}$$

Nós de-substituimos

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \frac{-1}{\ln|x| + C},\\ y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}.\end{aligned}$$

Queremos $y(1) = 1$, então

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

Portanto, $C = -1$ e a solução que estamos procurando é

$$y = \frac{-x}{\ln|x| - 1}.$$

3.7.3 Exercícios

Dica: Respostas nem sempre têm de ser em forma fechada.

Exercício* 3.7.1*: *Resolva* $y' + y(x^2 - 1) + xy^6 = 0$*, com* $y(1) = 1$.

Exercício* 3.7.2*: *Resolva* $2yy' + 1 = y^2 + x$*, com* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.7.3*: *Resolva* $y' + xy = y^4$*, com* $y(0) = 1$.

Exercício* 3.7.4*: *Resolva* $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício* 3.7.5*: *Resolva* $y' = (x + y - 1)^2$.

Exercício* 3.7.6*: *Resolva* $y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}$*, com* $y(1) = 2$.

Exercício* 3.7.101*: *Resolva* $xy' + y + y^2 = 0$*,* $y(1) = 2$.

Exercício* 3.7.102*: *Resolva* $xy' + y + x = 0$*,* $y(1) = 1$.

Exercício* 3.7.103*: *Resolva* $y^2y' = y^3 - 3x$*,* $y(0) = 2$.

Exercício* 3.7.104*: *Resolva* $2yy' = e^{y^2 - x^2} + 2x$.

Capítulo 4

Equações diferenciais ordinárias de ordem superior

4.1 EDOs lineares de segunda ordem

Note: partes de §3.1 e §3.2 em [BD]

Consideramos a *equação diferencial linear de segunda ordem*

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

Normalmente dividimos por $A(x)$ para obter

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

onde $p(x) = {}^{B(x)}/_{A(x)}$, $q(x) = {}^{C(x)}/_{A(x)}$, e $f(x) = {}^{F(x)}/_{A(x)}$. A palavra *linear* significa que a equação não contém nem potências nem funções de y, y', e y''.

No caso especial $f(x) = 0$ temos uma chamada equação *homogênea*.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.2}$$

Nós já vimos algumas equações lineares homogêneas.

$$y'' + k^2 y = 0 \qquad \text{Duas soluções são:} \quad y_1 = \cos(kx), \quad y_2 = \operatorname{sen}(kx).$$
$$y'' - k^2 y = 0 \qquad \text{Duas soluções são:} \quad y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}.$$

Se conhecemos duas soluções duma equação linear homogênea, conhecemos muito mais delas.

Teorema 4.1.1 (Superposição)**.** *Suponhamos que y_1 e y_2 sejam duas soluções da equação homogênea* (4.2)*. Então*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

também resolve (4.2) *para quaisquer constantes C_1 e C_2.*

Isto é, nós podemos somar soluções e multiplicar elas por constantes para obter novas soluções. Chamamos a expressão $C_1y_1 + C_2y_2$ uma *combinação linear* de y_1 e y_2. Vamos mostrar este teorema, a demonstração é muito esclarecedor e ilustra como equações lineares funcionam.

Demonstração: Seja $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Então

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1py_1' + C_2py_2' + C_1qy_1 + C_2qy_2 \\ &= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

A demonstração torna-se ainda mais concisa se usamos a notação de operadores. Um *operador* é um objeto que come funções e cuspe funções (mais ou menos como uma função, mas uma função come números e cuspe números). Definimos o operador L por

$$Ly = y'' + py' + qy.$$

A equação diferencial agora torna-se $Ly = 0$. O operador (e a equação) L ser *linear* significa que $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2$. A demonstração acima torna-se

$$Ly = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Duas soluções diferentes da segunda equação $y'' - k^2y = 0$ são $y_1 = \cosh(kx)$ e $y_2 = \operatorname{senh}(kx)$. Nos lembramos das definições $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Portanto, estas são soluções por superposição, pois elas são combinações lineares das duas soluções exponenciais.

As funções senh e cosh às vezes são mais convenientes para usar que a função exponencial. Revisamos algumas propriedades delas.

$$\begin{aligned} &\cosh 0 = 1 & &\operatorname{senh} 0 = 0 \\ &\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x & &\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \\ &\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \end{aligned}$$

Exercício* 4.1.1*: *Deduza estas propriedades usando a definição de* senh *e* cosh *em termos de exponenciais.*

Equações lineares têm respostas bonitas e simples à questao de existência e unicidade.

Teorema 4.1.2 (Existência e unicidade)**.** *Suponhamos que p, q, f sejam funções contínuas e a, b_0, b_1 sejam constantes. A equação*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

possui exatamente uma solução $y(x)$ que satisfaz as condições iniciais

$$y(a) = b_0, \qquad y'(a) = b_1.$$

Por exemplo, a equação $y'' + k^2 y = 0$ com $y(0) = b_0$ e $y'(0) = b_1$ tem a solução

$$y(x) = b_0 \cos(kx) + \frac{b_1}{k} \operatorname{sen}(kx).$$

A equação $y'' - k^2 y = 0$ com $y(0) = b_0$ e $y'(0) = b_1$ possui a solução

$$y(x) = b_0 \cosh(kx) + \frac{b_1}{k} \operatorname{senh}(kx).$$

Usando cosh e senh nesta equação nos permite resolver para as condições iniciais dum jeito mais limpo do que se tivessemos usado as funções exponenciais.

As condições iniciais para uma EDO de segunda ordem consistem em duas equações. Bom senso nos diz que se temos duas constantes quaisquer e duas equações, então devia ser possível determinar as constantes e achar a solução à equação diferencial que satisfaz as condições iniciais.

Pergunta: Suponhamos que tivessemos achado duas soluções diferentes y_1 e y_2 da equação homogênea (4.2). Cada solução pode ser escrita (usando superposição) na forma $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$?

A resposta é sim! Sob a condição que y_1 sejam y_2 suficientemente diferente o seguinte sentido. Vamos chamar y_1 e y_2 *linearmente independente* se uma não é um múltiplo constante da outra.

Teorema 4.1.3. *Sejam p, q, f funções contínuas e considere a equação homogênea* (4.2). *Sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes de* (4.2). *Então cada outra solução é da forma*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Isto é, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ é a solução geral.

Por exemplo, nós achamos as soluções $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = \cos x$ da equação $y'' + y = 0$. Não é dificil ver que seno e coseno não são múltiplos constantes um do outro: Se $\operatorname{sen} x = A \cos x$ para alguma constante A, consideramos $x = 0$ e deduzimos $A = A\cos(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$. Então, $\operatorname{sen} x = 0$ para todo x, o que é absurdo. Portanto, y_1 e y_2 são linearmente independentes e obtemos que

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

é a solução geral de $y'' + y = 0$.

Vamos estudar a solução das equações não-homogêneas de § 4.5. Primeiro vamos nos concentrar em achar soluções gerais de equações homogêneas.

4.1.1 Exercícios

Exercício* 4.1.2*: *Mostre que $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ são linearmente independentes.*

Exercício* 4.1.3*: *Considere* $y'' + 5y = 10x + 5$. *Ache (adivinhe!) uma solução.*

Exercício* 4.1.4*: *Mostre o princípio de superposição para equações não-homogêneas: Suponha que y_1 seja uma solução de $Ly_1 = f(x)$ e y_2 seja uma solução de $Ly_2 = g(x)$ (mesmo operador linear L). Mostre que y resolve $Ly = f(x) + g(x)$.*

Exercício* 4.1.5*: *Para a equação $x^2y'' - xy' = 0$, ache duas soluções, mostre que elas são linearmente independentes e ache a solução geral. Dica: Tente $y = x^r$.*

Observe que as equações da forma $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ são chamadas *Equações de Euler* ou *Equações de Cauchy-Euler*. Elas são resolvidas tentando $y = x^r$ e resolvendo para r (podemos supor $x \geq 0$ para simplificar).

Exercício* 4.1.6*: *Suponhamos que $(b - a)^2 - 4ac > 0$. a) Ache uma fórmula para a solção geral de $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. Dica: Tente $y = x^r$ e ache uma fórmula para r. b) O que acontece se $(b - a)^2 - 4ac = 0$ ou $(b - a)^2 - 4ac < 0$?*

Vamos voltar ao caso $(b - a)^2 - 4ac < 0$ mais tarde.

Exercício* 4.1.7*: *Mesma equação que no Exercício 4.1.6. Suponhamos $(b - a)^2 - 4ac = 0$. Ache a fórmula para a solução geral de $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. Dica: Tente $y = x^r \ln x$ para a segunda solução.*

Se você tem uma solução duma equação linear homogênea de segunda ordem você pode achar uma outra. Isto é o *método de redução de ordem.*

Exercício* 4.1.8** (Redução de ordem):*** *Suponhamos que y_1 seja uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Mostre que*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}\,dx$$

também é uma solução.

Observe: Se você quer achar uma fórmula de redução de ordem, começa tentando $y_2(x) = y_1(x)v(x)$. Depois coloque y_2 na equação, use o fato que y_1 é uma solução, substitua $w = v'$, e você tem uma equação de ordem um de w. Determine w e depois para v. Quando determine w, não esqueça a constante de integração. Vamos resolver algumas equações famosas usando este método.

Exercício* 4.1.9** (Equação de Chebyshev de ordem 1):*** *Considere $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$. a) Mostre que $y = x$ é uma solução. b) Use redução de ordem para achar uma segunda solução linearmente independente. c) Escreva a solução geral.*

Exercício* 4.1.10** (Equação de Hermite de ordem 2):*** *Considere $y'' - 2xy' + 4y = 0$. a) Mostre que $y = 1 - 2x^2$ é uma solução. b) Use redução de ordem para achar uma segunda solução linearmente independente. c) Escreva a solução geral.*

Exercício* 4.1.101*: *As funções $\operatorname{sen}(x)$ e e^x são linearmente independentes? Justifique.*

Exercício* 4.1.102*: *As funções e^x e e^{x+2} são linearmente independentes? Justifique.*

Exercício* 4.1.103*: *Adivinhe uma solução de $y'' + y' + y = 5$.*

Exercício* 4.1.104*: *Ache a solução geral de $xy'' + y' = 0$. Dica: observe que é uma EDO de primeira ordem de y'.*

4.2 EDOs de segunda ordem de coeficientes constantes

Note: §3.1 in [BD]

Suponhamos que tenhamos o problema

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Isto é uma equação linear homogênea de segunda ordem de coeficientes constantes. *Coeficientes constantes* significa que a funções em frente de y'', y', e y são constante, não dependendo de x.

Para adivinhar uma solução, pense numa função que você sabe que essencialmente fica a mesma se derivamos ela, para nós podermos pegar a função e suas derivadas, adicionar alguns múltiplos destas funções, e acabar com zero.

Vamos tentar uma solução da forma $y = e^{rx}$. Então $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Colocamos isto na equação original e obtemos

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0 \qquad \text{(divida por } e^{rx}\text{)}, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $r = 2$ ou $r = 4$, então e^{rx} é uma solução. Então seja $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{4x}$.

Exercício* 4.2.1*: *Verifique que y_1 e y_2 são soluções.*

As funções e^{2x} e e^{4x} são linearmente independentes. Se elas não fossem linearmente independentes, poderiamos escrever $e^{4x} = Ce^{2x}$para alguma constante C, implicando $e^{2x} = C$ para todo x, o que obviamente não é possível. Portanto, podemos escrever a solução geral como

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}.$$

Precisamos determinar C_1 e C_2. Para aplicar as condições iniciais, primeiro achamos $y' = 2C_1e^{2x} + 4C_2e^{4x}$. Colocamos $x = 0$ e resovlemos.

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = C_1 + C_2, \\ 6 &= y'(0) = 2C_1 + 4C_2. \end{aligned}$$

Aplique um pouco de álgebra linear ou simplesmente resolva essas equações usando matemática do Colégio. Por examplo, divida a segunda equações por 2 para obter $3 = C_1 + 2C_2$, e subtraia as duas equações para obter $5 = C_2$. Então $C_1 = -7$ desde que $-2 = C_1 + 5$. Portanto, a solução que estamos procurando é

$$y = -7e^{2x} + 5e^{4x}.$$

Vamos generalizar este exemplo a um método. Suponhamos que tenhamos a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.3}$$

onde a, b, c são constantes. Tentamos a solução $y = e^{rx}$ para obter

$$\begin{aligned} ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0, \\ ar^2 + br + c &= 0. \end{aligned}$$

A equação $ar^2 + br + c = 0$ é chamada a *equação característica* da EDO. Determinaos r usando a fórmula quadrática

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto, obtemos $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$ como soluções. Ainda tem uma dificuldade se $r_1 = r_2$, mas não é dificil superar ela.

Teorema 4.2.1. *Suponhamos que r_1 e r_2 sejam as raízes da equação característica.*

(i) Se r_1 e r_2 são disjuntos e real (i.e., se $b^2 - 4ac > 0$), então (4.3) *possui a solução geral*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

(ii) Se $r_1 = r_2$ (i.e., se $b^2 - 4ac = 0$), então (4.3) *possui a solução geral*

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}.$$

Para um outro exemplo do primeiro caso, considere a equação $y'' - k^2 y = 0$. Aqui a equacão característica é $r^2 - k^2 = 0$ ou $(r - k)(r + k) = 0$. Portanto, e^{-kx} e e^{kx} são duas soluções linearmente independentes.

Exemplo 4.2.1: Determine a solução geral de

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

A equação característica é $r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$. A equação possui uma raíz dupla $r_1 = r_2 = 4$. Portanto, a solução geral é

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

***Exercício* 4.2.2:** *Verifique que e^{4x} e xe^{4x} são linearmente independentes.*

É claro que e^{4x} resolve a equação. Se xe^{4x} também resolve a equação, então verificamos nossa solução geral. Vamos calcular $y' = e^{4x} + 4xe^{4x}$ e $y'' = 8e^{4x} + 16xe^{4x}$. Portanto,

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x} + 16xe^{4x} - 8(e^{4x} + 4xe^{4x}) + 16xe^{4x} = 0.$$

Deviamos observar que na prática raízes duplas occorem raramente. Se coeficientes são escolhidos realmente aleatoriamente, é muito improvável obter uma raíz dupla.

Vamos dar uma curta demonstração para ver que a solução xe^{rx} funciona quando a raíz é dupla. Este caso de fato é um caso limite da situação quando as duas raízes são disjuntos e muito perto. Observe que $\frac{e^{r_2 x}-e^{r_1 x}}{r_2-r_1}$ é uma solução se as raízes são disjuntos. Quando tomamos o limite com r_1 convergendo para r_2, de fato tomamos a derivada de e^{rx} em relação a r. Portanto, o limite é xe^{rx}, esta é a solução do caso duma raíz dupla.

4.2.1 Números complexos e a Fórmula de Euler

Pode acontecer que um polinômio tenha raízes complexas. Por exemplo, a equação $r^2 + 1 = 0$ não possui nenhuma solução real, mas ela tem duas soluções complexas. Aqui revemos algumas propriedades de números complexos.

Números complexos podem parecer um conceito estranho em particular devido à terminologia. Não tem nada imaginário ou realmente complicado com números complexos. Um número complexo é simplesmente um par de números reais, (a,b). Podemos pensar num números complexo como um ponto no plano. Adicionamos números complexos do jeito canônico, $(a,b) + (c,d) = (a + c,b + d)$. Definimos uma multiplicação por

$$(a,b) \times (c,d) \overset{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc).$$

Acontece que com esta regra de multiplicação, todas as propriedades comuns de aritmética valem. Além disso, acima de tudo, $(0,1) \times (0,1) = (-1,0)$.

Geralmente simplesmente escrevemos (a,b) como $a+ib$, e tratamos i como se fosse desconhecido. Podemos fazer aritmética com números complex exatamente como fariamos com polinômios. A propriedade mencionada acima torna-se $i^2 = -1$. Então cada vez que vemo i^2, podemos substitui-lo por -1. Os números i e $-i$ são soluções de $r^2 + 1 = 0$.

Note que engenheiros costuma usar a letra j em vez de i para a raíz quadrada de -1. Nós vamos usar a convenção de matemáticos e escrever i.

Exercício* 4.2.3*: *Tenha certeza que você entende (que pode justificar) as seguinted identidades:*

- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$,
- $\dfrac{1}{i} = -i$,
- $(3 - 7i)(-2 - 9i) = \cdots = -69 - 13i$,
- $(3 - 2i)(3 + 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 3^2 + 2^2 = 13$,
- $\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$.

Também podemos definir o exponencial e^{a+ib} dum número complexo. Podemos fazer isso simplesmente escrevendo a série de Taylor e colocando o número complexo. Como a maioria das propriedades da função exponencial podem ser mostradas considerando a série de Taylor, observamos que muitas destas propriedades ainda valem para o exponencial complexo. Por exemplo, $e^{x+y} = e^x e^y$. Isto significa que $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$. Portanto, se podemos calcular e^{ib}, podemos calcular e^{a+ib}. Para e^{ib} vamos usar a chamada *Fórmula de Euler*.

Teorema 4.2.2 (Fórmula de Euler)**.**

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{and} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta.}$$

Exercício* 4.2.4*: *Usando a Fórmula de Euler, verifique:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercício* 4.2.5*: *Identidades de ângulos duplos: Start with $e^{i(2\theta)} = \left(e^{i\theta}\right)^2$. Aplique Euler em cada lado e deduza:*

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Para um número complexo $a + ib$ vamos chamar a a *parte real* e b a *parte imaginária* do número. Muitas vezes a seguinte notação é usado:

$$\operatorname{Re}(a + ib) = a \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Im}(a + ib) = b.$$

4.2.2 Raízes complexas

Agora suponha que a equação $ay'' + by' + cy = 0$ tenha a equação característica $ar^2 + br + c = 0$ que possui raízes complexas. Pela fórmula quadrática as raízes são $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Estas são não-reais se $b^2 - 4ac < 0$. Neste caso podemos ver que as raízes (complexas) são

$$r_1, r_2 = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Observe que nós sempre vamos obter um par de raízes da forma $\alpha \pm i\beta$. Neste caso ainda podemos escrever a solução como

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém, a função exponencial agora possui valores complexas. Teriamos de permitir que C_1 e C_2 sejam números complexos para obter uma solução com valores reais (o que estamos procurando). Embora não tenha nada errado com esta abordagem, ela pode deixar cálculos mais difíceis e geralmente prefere-se achar duas soluções com valores reais.

Aqui podemos usar a Fórmula de Euler. Seja

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad \text{and} \qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Depois observe que

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \\ y_2 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x). \end{aligned}$$

Combinações lineares de soluções também são soluções. Portanto,

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ y_4 &= \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \end{aligned}$$

também são soluções. Além diss, eles possuem valores reais. Não é difícil ver que eles são linearmente independentes (não múltiplos um do outro). Portanto, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.2.3. *Considere a equação*

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Se a equação característica possui as raízes $\alpha \pm i\beta$ (quando $b^2 - 4ac < 0$), então a solução geral é

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Exemplo 4.2.2: Determine a solução geral de $y'' + k^2 y = 0$, para uma constante $k > 0$.

A equação característica é $r^2 + k^2 = 0$. Portanto, as raízes são $r = \pm ik$ e pelo teorema obtemos a solução geral

$$y = C_1\cos(kx) + C_2\operatorname{sen}(kx).$$

Exemplo 4.2.3: Determine a soluçao de $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$.

A equação característica é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Completando o quadrado, obtemos $(r-3)^2 + 2^2 = 0$ e, portanto, as raízes são $r = 3 \pm 2i$. Pelo teorema obtemos a solução geral

$$y = C_1 e^{3x}\cos(2x) + C_2 e^{3x}\operatorname{sen}(2x).$$

Para achar a solução satisfazendo as condições iniciais, primeiro colocamos zero e obtemos

$$0 = y(0) = C_1 e^0\cos 0 + C_2 e^0 \operatorname{sen} 0 = C_1.$$

Portanto, $C_1 = 0$ e $y = C_2 e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$. Derivamos

$$y' = 3C_2 e^{3x}\operatorname{sen}(2x) + 2C_2 e^{3x}\cos(2x).$$

De novo colocamos a condição inicial e obtemos $10 = y'(0) = 2C_2$, ou $C_2 = 5$. Portanto, a solução que estamos procurando é

$$y = 5e^{3x}\operatorname{sen}(2x).$$

4.2.3 Exercícios

Exercício* 4.2.6*: *Determine a solução geral de* $2y'' + 2y' - 4y = 0$.

Exercício* 4.2.7*: *Determine a solução geral de* $y'' + 9y' - 10y = 0$.

Exercício* 4.2.8*: *Resolva* $y'' - 8y' + 16y = 0$ *para* $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Exercício* 4.2.9*: *Resolva* $y'' + 9y' = 0$ *para* $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Exercício* 4.2.10*: *Determine a solução geral de* $2y'' + 50y = 0$.

Exercício* 4.2.11*: *Determine a solução geral de* $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Exercício* 4.2.12*: *Determine a solução geral de* $y'' = 0$ *usando os métodos desta seção.*

Exercício* 4.2.13*: *O método desta seção se aplica a equações de ordem diferente de dois. Vamos ver ordens superiores mais tarde. Tente resolver a equação de primeira ordem* $2y' + 3y = 0$ *usando os métodos desta seção.*

Exercício* 4.2.14*: *Voltamos às Equações de Euler de Exercício 4.1.6 on page 40. Suponhamos agora que* $(b - a)^2 - 4ac < 0$. *Ache uma fórmula para a solução geral de* $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$. *Sugestão: Observe que* $x^r = e^{r \ln x}$.

Exercício* 4.2.101*: *Determine a solução geral de* $y'' + 4y' + 2y = 0$.

Exercício* 4.2.102*: *Determine a solução geral de* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Exercício* 4.2.103*: *Determine a solução de* $2y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Exercício* 4.2.104*: *Determine a solução de* $2y'' + y' - 3y = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

4.3 Outras EDOs de segunda ordem

Note: adicionado por M.W.

4.3.1 Introdução

Nesta seção consideramos equações diferenciais de segunda ordem na forma normal

$$y'' = f(x,y,y').$$

Aqui f é uma função de três variáveis. Vamos denotar pontos em $\mathbf{R}^3$ por (x,y,v). Com esta notação vale o seguinte análogo ao Teorema de Picard.

Teorema 4.3.1. *Seja* $(x_0,y_0,v_0) \in \mathbf{R}^3$*. Se as funções* f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ *são (bem-definidas e) contínuas perto de* (x_0,y_0,v_0)*, então perto de* x_0 *existe uma única solução* y *do problema de valor inicial*

$$y'' = f(x,y,y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Não existe um algoritmo geral para resolver qualquer equação da forma $y'' = f(x,y,y')$, mas (além da situação de § 4.2) podemos considerar dois casos especiais onde temos uma chance.

4.3.2 A equação $y'' = f(x,y')$

Se a equação é da forma $y'' = f(x,y')$ (i.e. o y só aparece em forma de derivadas), podemos substituir $v := y'$ e obtemos $v' = y''$. Portanto, a EDO torna-se

$$v' = f(x,v)$$

e podemos tentar resolver esta equação e integrar v para calcular y. Note que obtemos duas constantes de integração: A primeira C_1 na solução v de $v' = f(x,v)$ e uma outra C_2 quando calculamos $y = \int v(x)dx + C_2$.

Exemplo 4.3.1: Consideramos a EDO

$$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0.$$

Escrevemos esta equação na forma normal

$$y'' = x^{-2} - 2x^{-1}y'$$

e observamos que, de fato, a equação é da forma $y'' = f(x,y')$. Substituimos $v := y'$ e obtemos a EDO $v' = x^{-2} - 2x^{-1}$ que é uma equação linear de primeira ordem que podemos escrever na forma canônica

$$v' + 2x^{-1}v = x^{-2}.$$

Multiplicando esta equação pelo fator integrante $r(x) = e^{2\int x^{-1}dx} = e^{2\ln x} = x^2$, obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 v) = x^2 v' + 2x = 1.$$

Integração dá $x^2 v = \int dx + C_1 = x + C_1$, i.e.

$$v = x^{-1} + C_1 x^{-2}.$$

No último passo integramos v para obter y:

$$y(x) = \int v(x)dx + C_2 = \ln x - C_1 x^{-1} + C_2.$$

Dados valores para $y(x_0)$, $y'(x_0)$, nós poderiamos calcular C_1 usando $y'(x_0) = v(x_0)$ e depois a constante C_2 usando $y(x_0)$ para obter a solução do problema de valor inicial.

Exercício* 4.3.1*: *Determine a solução geral de* $xy'' + y' = 1, \quad x > 0.$

Exercício* 4.3.2*: *Resolve* $y'' - x(y')^2 = 0$ *para* $y(1) = 0$*,* $y'(1) = 1$.

4.3.3 A equação $y'' = f(y,y')$

Um outro tipo especial é a equação

$$y'' = f(y,y')$$

Neste caso também substituimos $v = y'$ e obtemos

$$v' = f(y,v)$$

O único problema é que v é uma função da variável x e portanto ainda não podemos aplicar nossos métodos para equações de primeira ordem à EDO acima. Mas supondo que a solução final y seja uma função não-constante, podemos pensar em v como função da variável y e escrever

$$f(y,v) = v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v$$

Deste jeito, obtemos a EDO de primeira ordem

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(y,v)}{v}$$

e podemos determinar v como função de y. Se o problema for sem condições iniciais, a expressão para v vai conter uma constante de integração C_1. Depois a relação $\frac{dy}{dx} = v$ dá uma EDO separável que nos permite calcular y como função de x (introduzindo uma segunda constante de integração C_2 se não já tivermos condições iniciais).

Exemplo 4.3.2: Considere a equação

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

Também introduzimos condições iniciais para simplificar o problema: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Em outras palavras, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $v_0 = 2$.

Esta equação é do nosso tipo porque não contém a variável x e podemos escrever

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y},$$

Chamando o lado direito $f(y,v)$, poderiamos aplicar as fórmulas acima. Mas talvez seja melhor fazer passo a passo de novo para ilustrar o algoritmo:

Primeiro substituimos $v := y'$ e obtemos

$$-\frac{v^2}{y} = -\frac{(y')^2}{y} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}v$$

e, portanto

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y}.$$

Separamos variáveis e integramos para obter

$$\ln|v| = -\ln|y| + C_1.$$

Usando a condição inicial $v(y = 1) = 2$, obtemos $C_1 = \ln 2 + \ln 1 = \ln 2$. Portanto (observando $y_0, v_0 > 0$),

$$v = e^{-\ln y + \ln 2} = 2y^{-1}.$$

Usando $\dfrac{dy}{dx} = v$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

Separamos variáveis e obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{y^2}{2} = x + C_2$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1$, obtemos $C_2 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ e finalmente

$$y = \sqrt{4x + 1}$$

4.4 EDOs lineares de ordem superior

Note: §4.1 and §4.2 in [BD]

Depois de ler esta seção, pode ser útil tentar Projeto III do website do IODE: `http://www.math.uiuc.edu/iode/`.

Equações que aparecem em aplicações tendem a ser de segunda ordem Equações de ordem superior aparecem de vez em quando, mas é uma hipótese geral da física moderna que o mundo é "segunda ordem".

Os resultados básicos sobre EDOs lineares de ordem superior são essencialmente os mesmos como para equações de segunda ordem, com 2 substituido por n. O conceito importante de independência linear é um pouco mais complicado quando mais que duas variáveis são envolvidas.

Então vamos começar com uma equação linear homogênea geral

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \tag{4.4}$$

Teorema 4.4.1 (Superposição)**.** *Suponha que y_1, y_2, …, y_n sejam soluções da equação homogênea* (4.4)*. Então*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

também resolve (4.4) *para quaisquer constantes C_1, …, C_n.*

Em outras palavras, uma *combinação linear* de soluções de (4.4) também é uma solução de (4.4). Também temos o teorema de existência e unicidade para equaçãoes lineares não-homogêneas.

Teorema 4.4.2 (Existência e unicidade)**.** *Suponha que p_0 até p_{n-1}, e f sejam funções contínuas e $a, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sejam constantes. A equação*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

possui exatamente uma solução $y(x)$ que satisfaz a condição inicial

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

4.4.1 Independência linear

Quando tínhamos duas funções y_1 e y_2, dizíamos que eram linearmente independentes se uma não foi um múltiplo da outra. A mesma ideia vale para n funções. Neste caso é mais facil de definir na seguinte forma. As funções y_1, y_2, …, y_n são *linearmente independentes* se

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0$$

possui somente a solução trivial $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, onde a equação tem de valer para todo x. Se podemos resolver a equação com algumas constantes onde por exemplo $c_1 \neq 0$, então podemos escrever y_1 como combinação linear das outras. Se as funções não são linearmente independentes, elas são *linearmente dependentes*.

Exemplo 4.4.1: Verifique que e^x, e^{2x}, e^{3x} são linearmente independentes.

Vamos ver vários jeitos de mostrar este fato. Muitos livros introduzem Wronskianos, mas isso não é necessário aqui.

Escrevemos

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

Aplicamos as regras para a função exponencial e escrevemos $z = e^x$. Então obtemos

$$c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 = 0.$$

O lado esquerdo é um polinômio de ordem 3 na variável z. Ele pode ser identicamente zero, ou ele pode possuir no máximo 3 raízes. A equação acima (que vale para todo $z > 0$) implica que o polinômio é identicamente zero, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, and as funções são linearmente independentes.

Vamos tentar um outro jeito. Como antes escrevemos

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

Esta equação tem de valer para todo x. O que poderíamos fazer é dividir por e^{3x} para obter

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 = 0.$$

Como a equação vale para todo x, consideramos $x \to \infty$. Depois de tomar o limite observamos que $c_3 = 0$. Portanto, nossa equação torna-se

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0.$$

Agora repita o mesmo argumento para esta equção.

Quel tal considerar um outro jeito? De novo escrevemos

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0.$$

Podemos considerar a equação e suas derivadas para valores diferentes de x para obter equações para c_1, c_2, and c_3. Primeiro dividimos por e^x para simplificar.

$$c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} = 0.$$

Colocamos $x = 0$ para obter a equação $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Agora derivamos os dois lados

$$c_2 e^x + 2c_3 e^{2x} = 0.$$

Colocamos $x = 0$ para obter $c_2 + 2c_3 = 0$. Dividimos por e^x de novo e derivamos para obter $2c_3 e^x = 0$. É claro que c_3 é zero. Portanto, c_2 tem de ser zero como $c_2 = -2c_3$, e c_1 tem de ser zero porque $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

Não tem um melhor jeito de mostrar a independência linear. Todos estes métodos são igualmente válidos.

Exemplo 4.4.2: Dum outro lado, as funções e^x, e^{-x}, e $\cosh x$ são linearmente dependentes. Simplesmente aplique a definição do coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{or} \qquad 2\cosh x - e^x - e^{-x} = 0.$$

4.4.2 EDOs de ordem superior com coeficientes constantes

Quando temos uma equação linear homogênea de ordem superior, as ideias são as mesmas que no caso de segunda ordem. Simplesmente precisamos achar mais soluções. Se a equação é de ordem n, precisamos achar n soluções linearmente independentes. Vamos considerar um exemplo.

Exemplo 4.4.3: Determine a solução geral de

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0. \tag{4.5}$$

Tente: $y = e^{rx}$. Colocamos na EDO e obtemos

$$r^3e^{rx} - 3r^2e^{rx} - re^{rx} + 3e^{rx} = 0.$$

Dividimos por e^{rx}. Então

$$r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0.$$

O truque agora é achar as raízes. Existe uma fórmula para as raízes de polinômios de grau 3 e 4 mas ela é muito compliacada. Não tem nenhuma fórmula para polinômios de graus superiores. Isso não quer dizer que as raízes não existem. Sempre tem n raízes para um polinômio de grau n. Elas podem ser repetidas e elas podem ser complexas. Computadores sabem achar raízes bastante bem para polinômios de tamanhos razoáveis.

Um bom início é plotear o polinômio e checar onde ele é zero. Também podemos simplesmente tentar colocar números no polinômio. Simplesmente começamos colocando os números $r = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ e observamos se obtemos zero (também podemos tentar raízes complexas). Até se nosso número não dá zero, podemos obter uma indicação de onde as raízes ficam. Por exemplo, colocamos $r = -2$ no nosso polinômio e obtemos -15; colocamos $r = 0$ e obtemos 3. Isso significa que tem uma raíz entre $r = -2$ e $r = 0$ pois o sinal mudou. Se achamos uma raízs, digamos r_1, então sabemos que $(r - r_1)$ é um fator do nosso polinômio. Divisão polinômial pode ser usada depois.

Uma boa estratégia é começar com $r = -1$, 1, ou 0. Estas são simples de calcular. Acontece que nosso polinômio possui duas tais raízes, $r_1 = -1$ e $r_2 = 1$. Devia ter 3 raízes e é fácil achar a última raíz. O termo constante num polinômio é o múltiplo da negação de todas as raízes pois $r^3 - 3r^2 - r + 3 = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)$. No nosso caso observamos

$$3 = (-r_1)(-r_2)(-r_3) = (1)(-1)(-r_3) = r_3.$$

Você devia verificar que, de fato, $r_3 = 3$ é uma raíz. Portanto, sabemos que e^{-x}, e^x e e^{3x} são soluções de (4.5). Elas são linearmente independentes como é fácil verificar, e tem 3 delas, o que é exatamente o número que precisamos. Portanto, a solução geral é

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{3x}.$$

Suponha que tenha algumas condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, e $y''(0) = 3$. Então

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 + C_2 + C_3, \\ 2 &= y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3, \\ 3 &= y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3. \end{aligned}$$

Podemos resolver uma tal sistema de equações usando álgebra de matríces, veja § **??**. Por enquanto, observamos que a solução é $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1$ e $C_3 = 1/4$. A solução específica da EDO é

$$y = \frac{-1}{4}\, e^{-x} + e^{x} + \frac{1}{4}\, e^{3x}.$$

Em seguida, suponhamos que tenhamos raízes reais, mas elas são repetidas. Digamos que temos uma raíz r repetida k vezes. No espírito da solução de segunda ordem, e pelos mesmos argumentos, temos as soluções

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}.$$

Pegamos uma combinação linear destas soluções para achar a solução geral.

Exemplo 4.4.4: Resolva

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Observamos que a equação característica é

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0.$$

Por inspeção observamos que $r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = r(r-1)^3$. Portanto, as raízes repetidas segundo multiplicidade são $r = 0, 1, 1, 1$. Portanto a solução geral é

$$y = \underbrace{(C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^{x}}_{\text{termos vindo de } r=1} + \underbrace{C_4}_{\text{de } r=0}.$$

Da mesma forma que no caso de segunda ordem podemos tratar raízes não-reais. Raízes não-reais sempre vêm em pares $r = \alpha \pm i\beta$. Suponha que tenha duas taís raízes, cada uma repetida k vezes. A solução correspondente é

$$(C_0 + C_1x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (D_0 + D_1x + \cdots + D_{k-1}x^{k-1})\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x).$$

onde $C_0, \ldots, C_{k-1}, D_0, \ldots, D_{k-1}$ são quaisquer constantes.

Exemplo 4.4.5: Resolva

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

A equação característica é

$$\begin{aligned} r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 &= 0, \\ (r^2 - 2r + 2)^2 &= 0, \\ ((r-1)^2 + 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, as raízes são $1 \pm i$, cada uma com multiplicidade 2. Portanto, a solução geral da EDO é

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} \cos x + (C_3 + C_4x)\, e^{x} \operatorname{sen} x.$$

O jeito como resolvemos a equação característica acima de fato é adivinhar ou por inspeção. Geralmente não é fácil. Também poderiamos ter perguntado um computador ou uma calculadora avançada para as raízes.

4.4.3 Exercícios

Exercício* 4.4.1*: *Determine a solução geral de* $y''' - y'' + y' - y = 0$*.*

Exercício* 4.4.2*: *Determine a solução geral de* $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' = 0$*.*

Exercício* 4.4.3*: *Determine a solução geral de* $y''' + 2y'' + 2y' = 0$*.*

Exercício* 4.4.4*: *Suponha que a equaço característica duma equação diferencial seja* $(r-1)^2(r-2)^2 = 0$*. a) Ache uma tal equação diferencial. b) Determine a solução geral dela.*

Exercício* 4.4.5*: *Suponha que uma equação de ordem quatro possua uma solução* $y = 2e^{4x} x \cos x$*. a) Ache uma tal equação. b) Determine as condições iniciais satisfeitas pela solução dada (por exemplo,* $y(0)$*,* $y'(0)$*).*

Exercício* 4.4.6*: *Determine a solução geral da equação de Exercício 4.4.5 (a).*

Exercício* 4.4.7*: *Sejam* $f(x) = e^x - \cos x$*,* $g(x) = e^x + \cos x$*, e* $h(x) = \cos x$*. As funções* f*,* g*, and* h *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

Exercício* 4.4.8*: *Sejam* $f(x) = 0$*,* $g(x) = \cos x$*, e* $h(x) = \operatorname{sen} x$*. As funções* f*,* g*, e* h *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

Exercício* 4.4.9*: *As funções* x*,* x^2*, e* x^4 *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

Exercício* 4.4.10*: *As funções* e^x*,* xe^x*, e* x^2e^x *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

Exercício* 4.4.101*: *Determine a solução geral de* $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$

Exercício* 4.4.102*: *Suponha que a equação característica duma equação diferencial de ordem três tenha as raízes 3,*$\pm 2i$*. a) Qual é a equação característica? b) Ache a equação diferencial correspondente. c) Determine a solução geral.*

Exercício* 4.4.103*: *Resolva* $1001y''' + 3.2y'' + \pi y' - \sqrt{4}y = 0$*,* $y(0) = 0$*,* $y'(0) = 0$*,* $y''(0) = 0$*.*

Exercício* 4.4.104*: *As funções* e^x*,* e^{x+1}*,* e^{2x}*,* $\operatorname{sen}(x)$ *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

Exercício* 4.4.105*: *As funções* $\operatorname{sen}(x)$*,* x*,* $x\operatorname{sen}(x)$ *são linearmente independentes? Neste caso, mostre que são. Senão ache uma combinação linear não-trivial que dá zero.*

4.5 Equações não-homogêneas

Note: §3.5 e §3.6 em [BD]

4.5.1 Resolver equações não-homogêneas

Nós resolvemos equações lineares homogêneas de coeficientes constantes. E quanto a EDOs lineares não-homogêneas? Isto é, suponha que tenhamos uma equação como

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1. \tag{4.6}$$

Vamos escrever $Ly = 2x + 1$ quando a forma exata do operador não é importante. Resolvemos (4.6) da seguinte maneira. Primeiro, determinamos a solução geral y_c da *equação homogênea associada*

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{4.7}$$

Chamamos y_c a *solução complementar*. Em seguida, achamos uma *solução particular* y_p de (4.6) de alguma maneira. Então

$$y = y_c + y_p$$

é a solução geral de (4.6). Temos $Ly_c = 0$ e $Ly_p = 2x+1$. Como L é um *operador linear*, verificamos que y é uma solução: $Ly = L(y_c + y_p) = Ly_c + Ly_p = 0 + (2x + 1)$. Agora vamos ver porque obtemos a solução *geral*.

Sejam y_p e $\tilde{y}_p$ duas soluções particulares diferentes de (4.6). Escrevemos a diferença como $w = y_p - \tilde{y}_p$. Agora colocamos w no lado esquerdo da equação para obter

$$w'' + 5w' + 6w = (y_p'' + 5y_p' + 6y_p) - (\tilde{y}_p'' + 5\tilde{y}_p' + 6\tilde{y}_p) = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

Usando notação de operadores, o cálculo torna-se mais simples. Como L é um operador linear, escrevemos

$$Lw = L(y_p - \tilde{y}_p) = Ly_p - L\tilde{y}_p = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

Portato, $w = y_p - \tilde{y}_p$ é uma solução de (4.7), isto é $Lw = 0$. Duas soluções quaisquer de (4.6) diferem por uma solução da equação homogênea (4.7). A solução $y = y_c + y_p$ inclui *todas* as soluções de (4.6), pois y_c é a solução geral equação homogênea associada.

Teorema 4.5.1. *Seja $Ly = f(x)$ uma EDO linear (não necessariamente de coeficientes constantes). Seja y_c a solução geral da equação homogênea associada $Ly = 0$ e seja y_p qualquer solução particular $Ly = f(x)$. Então a solução geral de $Ly = f(x)$ é*

$$y = y_c + y_p.$$

O moral da história é que podemos achar a solução particular de qualquer maneira. Se achamos uma outra solução particular (por um outro método, ou simplesmente adivinhando), então ainda obtemos a mesma solução geral. A fórmula pode parecer diferente, e as constantes que temos de escolher para satifazer as condições iniciais podem ser diferentes, mas é a mesma solução.

4.5.2 Coeficientes indeterminadas

O truque é, de alguma maneira, adivinhar uma solução particular de (4.6). Observe que $2x + 1$ é um polinômio, e o lado esquerdo da equação vai ser um polinômio se y é um polinômio do mesmo grau. Vamos tentar

$$y_p = Ax + B.$$

Substituimos para obter

$$y_p'' + 5y_p' + 6y_p = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B) = 0 + 5A + 6Ax + 6B = 6Ax + (5A + 6B).$$

Então $6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1$. Portanto, $A = 1/3$ e $B = -1/9$. Isto é $y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x-1}{9}$. Resolvendo o problema complementar (exercício!), obtemos

$$y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Portanto, a solução geral de (4.6) é

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}.$$

Agora suponha que além disso sejam dadas algumas condições iniciais. Por exemplo, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1/3$. Primeiro achamos $y' = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x} + 1/3$. Em seguida,

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{9}, \qquad \frac{1}{3} = y'(0) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{3}.$$

Resolvemos este sistema de equações lineares para obter $C_1 = 1/3$ e $C_2 = -2/9$. A solução particular que estamos procurando é

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9} = \frac{3e^{-2x} - 2e^{-3x} + 3x - 1}{9}.$$

Exercício* 4.5.1*: *Verifique que y de fato resolve a equação* (4.6) *e as condições iniciais dadas.*

Observe: Um erro comum é determinar as constantes usando as condições iniciais para y_c e somente depois adicionar a solução particular y_p. Isso *não* vai funcionar. Primeiro tem de calcular $y = y_c + y_p$ e *só depois* determinar as constantes usando as condições iniciais.

Um lado direito contendo funções exponenciais, senos e cosenos pode ser tratado semelhantemente. Por exemplo,

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(2x).$$

Vamos achar algum y_p. Começamos adivinhando que a solução inclua algum múltiplo de $\cos(2x)$. Talvez também tenhamos que adicionar um múltiplo de $\operatorname{sen}(2x)$ à nossa conjetura pois derivadas do coseno são senos. Tentamos

$$y_p = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x).$$

Substituimos y_p na equação e obtemos

$$-4A\cos(2x) - 4B\,\mathrm{sen}(2x) - 4A\,\mathrm{sen}(2x) + 4B\cos(2x) + 2A\cos(2x) + 2B\,\mathrm{sen}(2x) = \cos(2x).$$

O lado esquerdo tem de ser igual ao lado direito. Agrupamos termos e obtemos $-4A + 4B + 2A = 1$ e $-4B - 4A + 2B = 0$. Então, $-2A + 4B = 1$ e $2A + B = 0$ e, portanto, $A = {}^{-1}/_{10}$ e $B = {}^{1}/_{5}$. Então

$$y_p = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x) = \frac{-\cos(2x) + 2\,\mathrm{sen}(2x)}{10}.$$

Semelhantemente, se o lado direito contém funções exponenciais tentamos funções exponenciais. Por exemplo, para

$$Ly = e^{3x},$$

vamos tentar $y = Ae^{3x}$ como nossa conjetura e tentar determinar A.

Se o lado direito é um produto de senos, cosenos, funções exponenciais e polinômios, podemos usar a regra do produto para fazer uma conjetura. Temos de adivinhar uma forma para y_p tal que Ly_p seja da mesma forma e tenha todos os termos necessários para o lado direito. Por exemplo,

$$Ly = (1 + 3x^2)\,e^{-x}\cos(\pi x).$$

Para esta equação vamos adivinhar

$$y_p = (A + Bx + Cx^2)\,e^{-x}\cos(\pi x) + (D + Ex + Fx^2)\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(\pi x).$$

Vamos substituir e esperemos que obtenhamos equações para determinar A,B,C,D,E,F. Como você pode ver, isto pode levar a cálculos muito longos e tediosos muito rapidamente. C'est la vie!

Existe um problema em tudo isso. Podia ser que nossa conjetura de fato resolva a equação homogênea associada. Isto é, suponha que tenhamos

$$y'' - 9y = e^{3x}.$$

Queriamos adivinhar $y = Ae^{3x}$, mas se substituimos isso no lado esquerdo da equação, obtemos

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Não tem nenhuma maneira de escolher A para o lado esquerdo ficar e^{3x}. O truque neste caso é multiplicar nossa conjetura por x para nos livrarmos da duplicação com a solução complementar. Quer dizer, primeiro calculamos y_c (solução de $Ly = 0$)

$$y_c = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$$

e observamos que o termo e^{3x} é um duplicado da nossa conjetura. Modificamos nossa conjetura para $y = Axe^{3x}$ e observamos que não tem mais duplicação. Vamos tentar. Observe que $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$ e $y'' = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$. Então

$$y'' - 9y = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x}.$$

Então $6Ae^{3x}$ devia ser igual a e^{3x}. Portanto, $6A = 1$ e então $A = 1/6$. Portanto, agora podemos escrever a solução geral na forma

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} x e^{3x}.$$

É possível que multiplicar por x não nos livre de toda duplicação. Por exemplo,

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$$

A solução complementar é $y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. Adivinhar $y = Axe^{3x}$ não nos levaria a lado nenhum. Neste caso queremos adivinhar $y_p = Ax^2 e^{3x}$. Basicamente, queremos multiplicar nossa conjetura por x até toda duplicação ter desaparecida. *Mas não mais!* Multiplicar demaisiadas vezes não vai funcionar.

Finalmente, o que fazemos se o lado direito possui vários termos, como

$$Ly = e^{2x} + \cos x.$$

Neste caso achamos u que resolv $Lu = e^{2x}$ e v que resolva $Lv = \cos x$ (isto é, consideramos cada termo separadamente). Depois observe que se $y = u + v$, então $Ly = e^{2x} + \cos x$. Isto é devido ao fato que L é linear; temos $Ly = L(u + v) = Lu + Lv = e^{2x} + \cos x$.

4.5.3 Variação de parâmetros

O método de coeficientes indeterminados vai funcionar para muitos problemas básicos que aparecem. Mas não sempre funciona. Só funciona quando o lado direito da equação $Ly = f(x)$ possui só um número finito de derivadas linearmente independentes para podermos escrever uma conjetura que contenha todas. Algumas equações são um pouco mais duras. Considere

$$y'' + y = \tan x.$$

Observe que cada nova derivada de $\tan x$ é completamente diferente e não pode ser escrita como combinação linear das derivadas anteriores. Obtemos $\sec^2 x$, $2 \sec^2 x \tan x$, etc. . . .

Esta equação chama para um outro método. Apresentamos o método de *variação de parâmetros*, que vai tratar qualquer equação da form $Ly = f(x)$, contanto que possamos resolver certas integrais. Para simplificar vamos nos restringir a equações de coeficientes constantes de segunda ordem, mas o método vai funcionar para equações de ordem superior também (os cálculos vão ser mais tediosos). O método também funciona para equações com coeficientes não-constantes, contanto que possamos resolver a equaçõa homogênea associada.

Talvez seja o melhor explicar este método com um exemplo. Vamos tentar resolver a equação

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

Primeiro determinamos a solução complementar (solução de $Ly_c = 0$). Obtemos $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$, onde $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$. Agora para tentar achar uma solução da equação não-homogênea tentamos

$$y_p = y = u_1y_1 + u_2y_2,$$

onde u_1 e u_2 são *funções* e não constantes. Estamos tentando satisfazer $Ly = \tan x$. Isso nos dá uma condição para as funções u_1 e u_2. Calculamos (observe a regra do produto!)

$$y' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2').$$

Ainda podemos impor mais uma condição a nosso critério para simplificar cálculos (temos duas funções desconhecidas, então deviamos poder impor duas condições). Requeremos que $(u_1'y_1 + u_2'y_2) = 0$. Isto deixa calcular a segunda derivada mais simples.

$$\begin{aligned} y' &= u_1y_1' + u_2y_2', \\ y'' &= (u_1'y_1' + u_2'y_2') + (u_1y_1'' + u_2y_2''). \end{aligned}$$

Como y_1 e y_2 são soluções de $y'' + y = 0$, sabemos que $y_1'' = -y_1$ e $y_2'' = -y_2$. (Observe: Se, em vez disso, a equação fosse $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, teriamos $y_i'' = -p(x)y_i' - q(x)y_i$.) Então

$$y'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - (u_1y_1 + u_2y_2).$$

Temos $(u_1y_1 + u_2y_2) = y$ e então

$$y'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - y,$$

e, portanto,

$$y'' + y = Ly = u_1'y_1' + u_2'y_2'.$$

Para y satisfazer $Ly = f(x)$ temos de ter $f(x) = u_1'y_1' + u_2'y_2'$.

Portanto, o que temos de resolver são as duas equações (condições) que impusemos em u_1 e u_2

$$\boxed{\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x). \end{aligned}}$$

Agora podemos determinar u_1' e u_2' em termos de $f(x)$, y_1 e y_2.

Sempre vamos obter as fórmulas acima para qualquer $Ly = f(x)$, onde $Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y$. Existe uma fórmula geral para a solução onde simplesmente podemos substituir (veja parágrafo Alternativa), mas geralmente é melhor repetir o que fazemos abaixo. No nosso caso as duas equações tornam-se

$$\begin{aligned} u_1' \cos(x) + u_2' \operatorname{sen}(x) &= 0, \\ -u_1' \operatorname{sen}(x) + u_2' \cos(x) &= \tan(x). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} u_1' \cos(x) \operatorname{sen}(x) + u_2' \operatorname{sen}^2(x) &= 0, \\ -u_1' \operatorname{sen}(x) \cos(x) + u_2' \cos^2(x) &= \tan(x) \cos(x) = \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} &u_2'(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)) = \operatorname{sen}(x), \\ &u_2' = \operatorname{sen}(x), \\ &u_1' = \frac{-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Agora precisamos integrar u_1' e u_2' para obter u_1 e u_2.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1' \, dx = \int -\tan(x) \operatorname{sen}(x) \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + 1} \right| + \operatorname{sen}(x), \\ u_2 &= \int u_2' \, dx = \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x). \end{aligned}$$

Portanto, nossa solução particular é

$$\begin{aligned} y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2} \cos(x) \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + 1} \right| + \cos(x) \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \operatorname{sen}(x) = \\ = \frac{1}{2} \cos(x) \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + 1} \right|. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral de $y'' + y = \tan x$ é

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + 1} \right|.$$

Alternativa: Para quem preferir uma fórmula geral para o método de variação de parâmetros, primeiro vamos calcular as soluções $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Definimos $W(x) := y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$ (o "Wronskiano" de y_1, y_2) e observamos que a regra de Cramer para o sistema acima implica

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}.$$

Agora integramos e obtemos

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) \\ &= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \end{aligned}$$

Observe que nas integrais acima podemos escolher qualquer primitiva, pois outras primitivas só vão levar a uma outra solução particular.

Exemplo 4.5.1: Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = \sec x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Como no exemplo acima duas soluções linearmente independentes do problema homogêneo são dadas por $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$. Agora aplicamos a fórmula geral da Versão 2 acima para calcular uma solução particular: Primeiro calculamos

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \int \operatorname{sen} x \sec x dx + \operatorname{sen} x \int \cos x \sec x dx \\ &= -\cos x \ln(\sec x) + \operatorname{sen} x \cdot x \end{aligned}$$

Usando a solução complementar $y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$, obtemos a solução geral

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x).$$

Agora substituimos a condição inicial e obtemos $1 = C_1$, $0 = C_2$. Em outras palavras, a solução do nosso problema de valor inicial é

$$y(x) = \cos x + x \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x).$$

4.5.4 Exercícios

***Exercício* 4.5.2:** *Ache uma solução particular de* $y'' - y' - 6y = e^{2x}$.

***Exercício* 4.5.3:** *Ache uma solução particular de* $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

***Exercício* 4.5.4:** *Resolva o problema de valor inicial* $y'' + 9y = \cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)$ *for* $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

***Exercício* 4.5.5:** *Monte a forma da solução particular mas não determine os coeficientes para* $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$.

Exercício* 4.5.6*: *Monte a forma da solução particular mas não do not solve determine os coeficientes para* $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + x + \operatorname{sen} x$.

Exercício* 4.5.7*: *a) Usando variação de parâmetros ache uma solução particular de* $y'' - 2y' + y = e^x$. *b) Ache uma solução particular usando coeficientes ideterminadas. c) As suas duas soluções são iguais? O que está acontecendo?*

Exercício* 4.5.8*: *Ache uma solução particular de* $y'' - 2y' + y = \operatorname{sen}(x^2)$*. Você pode deixar a resposta como uma integral definida.*

Exercício* 4.5.101*: *Ache uma solução particular de* $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}(3x)$

Exercício* 4.5.102*: *a) Ache uma solução particular de* $y'' + 2y = e^x + x^3$*. b) Determine a solução geral.*

Exercício* 4.5.103*: *Resolva* $y'' + 2y' + y = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Exercício* 4.5.104*: *Use variação de parâmetros para achar uma solução particular de* $y'' - y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Leitura Adicional

[BD] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, 9.ed., LTC, Rio de Janeiro (RJ), 2010.

[I] E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1956.

Soluções de Alguns Exercícios

3.1.101: Calcule $x' = -2e^{-2t}$ e $x'' = 4e^{-2t}$. Agora $(4e^{-2t}) + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) = 0$.

3.1.102: Sim.

3.1.103: $y = x^r$ é uma solução para $r = 0$ e $r = 2$.

3.1.104: $C_1 = 100$, $C_2 = -90$

3.1.105: $\varphi = -9e^{8s}$

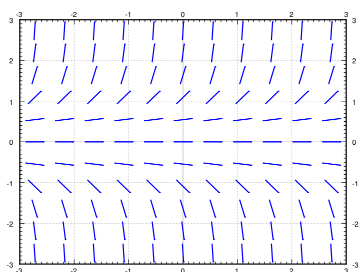
3.2.101: $y = e^x + \frac{x^2}{2} + 9$

3.2.102: $x = (3t - 2)^{1/3}$

3.2.103: $x = \operatorname{sen}^{-1}(t + 1)$

3.2.104: 170

3.3.101:



$y = 0$ é a solução tal que $y(0) = 0$.

3.3.102: Sim a solução existe. $y' = f(x,y)$ onde $f(x,y) = xy$. A função $f(x,y)$ é contínua e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, o que também é contínua perto de $(0,0)$. Portanto, uma solução existe e é única. (De fato, $y = 0$ é a solução).

3.3.103: Não, a equação não é definida em $(x,y) = (1,0)$.

3.4.101: $y = Ce^{x^2}$

3.4.102: $y = e^{t^3} + 1$

3.4.103: $x^3 + x = t + 2$

3.4.104: $y = \frac{1}{1-\ln x}$

3.6.101: $y = Ce^{-x^3} + 1/3$

3.6.102: $y = 2e^{\cos(2x)} + 1$

3.6.103: $2000\ln(10) - 2000\ln(5) - 1000 \approx 386{,}29$ gramas

3.6.104: $P(10) = 1000e^{2\times 10 - 0.05\times 10^2} = 1000e^{15} \approx 3.27 \times 10^9$

3.7.101: $y = \frac{2}{3x-2}$

3.7.102: $y = \frac{3-x^2}{2x}$

3.7.103: $y = \left(7e^{3x} + 3x + 1\right)^{1/3}$

3.7.104: $y = \sqrt{x^2 - \ln(C - x)}$

4.1.101: Sim. Para justificar tente achar uma constante A tal que $\operatorname{sen}(x) = Ae^x$ para todo x.

4.1.102: Não. $e^{x+2} = e^2e^x$.

4.1.103: $y = 5$

4.1.104: $y = C_1 \ln(x) + C_2$

4.2.101: $y = C_1e^{(-2+\sqrt{2})x} + C_2e^{(-2-\sqrt{2})x}$

4.2.102: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

4.2.103: $y = e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\operatorname{sen}(x)$

4.2.104: $y(x) = \frac{2(a-b)}{5}\, e^{-3x/2} + \frac{3a+2b}{5}\, e^x$

4.4.101: $y = C_1e^x + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$

4.4.102: a) $r^3 - 3r^2 + 4r - 12 = 0$ b) $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 0$ c) $y = C_1e^{3x} + C_2\operatorname{sen}(2x) + C_3\cos(2x)$

4.4.103: $y = 0$.

4.4.104: Não. $e^1e^x - e^{x+1} = 0$.

4.4.105: Sim. (Sugestão: Primeiro observe que $\operatorname{sen}(x)$ é limitada. Depois observe que x e $x\operatorname{sen}(x)$ não podem ser múltiplos uma da outra.)

4.5.101: $y = \frac{-16\operatorname{sen}(3x) - 6\cos(3x)}{73}$

4.5.102: a) $y = \frac{2e^x+3x^3-9x}{6}$. b) $y = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + \frac{2e^x+3x^3-9x}{6}$.

4.5.103: $y(x) = x^2 - 4x + 6 + e^{-x}(x - 5)$.

4.5.104: $y = \frac{2xe^x - (e^x+e^{-x})\log(e^{2x}+1)}{4}$

Índice Remissivo