



OTIMIZAÇÃO DE IMAGENS PANORÂMICAS ATRAVÉS DE TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Leonardo Souto Ferreira
Universidade Federal de Santa Catarina
leonardosouto96@outlook.com

Leonardo Koller Sacht
Universidade Federal de Santa Catarina
leonardo.sacht@ufsc.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma nova forma de melhora perceptual de imagens panorâmicas (campo de visão maior que 90°) através de transformações utilizando números complexos. Apresentando primeiramente as bases das projeções de imagens, com o conceito de esfera visível, o trabalho explica resumidamente as projeções mais famosas (perspectiva, estereográfica e Mercator). Constrói também uma relação entre a projeção estereográfica, a esfera de Riemann e o plano complexo estendido. Demonstra os elementos mais importantes (para o objetivo) das transformações de Möbius e depois os aplica (demonstrando uma relação entre as constantes das transformações com a ideia de cross ratio), através de algoritmos, em imagens panorâmicas, gerando resultados visualmente satisfatórios.

Palavras-chave: Imagens. Möbius. Otimização.

1. Introdução

Com o desenvolvimento de novos equipamentos de fotografia e novas técnicas de processamento de imagens (*stitching*, ver [5]), foi possível expandir o campo de visão (CDV) de uma imagem (usualmente próximo de 90° latitude e 90° longitude) para acima do normalmente utilizado, gerando imagens de até 360° de longitude, as quais foram chamadas de *imagens panorâmicas*. Entretanto, estas imagens possuem naturalmente distorções e, com isso, foi criado um novo campo na Matemática Aplicada, que busca otimizar visualmente tais imagens. Este trabalho procura, através da utilização de transformações com números complexos, trazer uma contribuição a este campo de estudos.

2. A Esfera Visível e Imagens Panorâmicas

Neste artigo, assim como em [5], toda cena observada de um ponto de vista fixo será modelada como sendo a esfera unitária centrada no ponto de visão ($S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$), em que cada ponto possui uma cor associada, a cor que é vista quando alguém olha através deste ponto. Por conveniência, assumiremos que a origem do \mathbb{R}^3 é o ponto de vista.

Esta esfera nós chamamos de *esfera visível*. Note que a esfera visível representa totalmente o campo de visão com 360° longitude por 180° latitude.

Uma bem conhecida e útil representação da esfera S^2 é por coordenadas de longitude e latitude:

$$r: [-\pi, \pi] \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow S^2$$

$$(\lambda, \phi) \Leftrightarrow (\cos(\lambda) \cos(\phi), \sin(\lambda) \cos(\phi), \sin(\phi))$$

Esta representação é ilustrada abaixo:

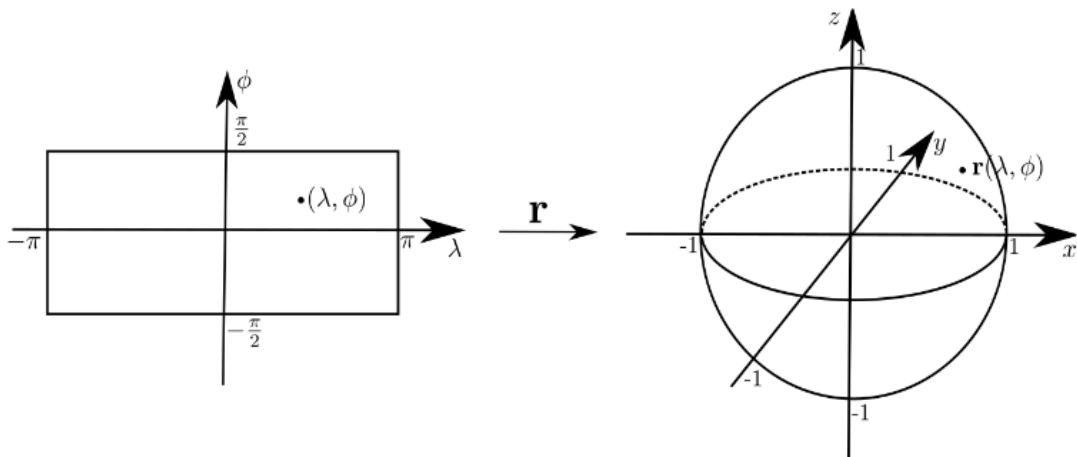


Figura 1 - Representação de longitude/latitude r .

Chamamos de *domínio equirretangular* o domínio de longitudes e latitudes.

Tais imagens do domínio equirretangular são chamadas de *imagens equirretangulares* e serão a informação de entrada dos algoritmos que desenvolveremos.

Um exemplo de imagem equirretangular é mostrado abaixo:



Figura 2 - "rodela equirectangular", do usuário do Flickr Luca Biada, em [6].

3. Projeções Clássicas

Projeção de Perspectiva

Sem dúvidas é a projeção mais conhecida, pois a maioria das lentes de câmeras simples capturam fotos através de uma perspectiva linear aproximada. O processo de formação de uma imagem na retina do nosso olho também se aproxima bastante da transformação perspectiva.

A construção desta projeção é a seguinte: a esfera visível é projetada em um plano tangente (em nosso caso, $x = 1$) através de linhas que emanam do centro da esfera, como mostrado na figura 3.

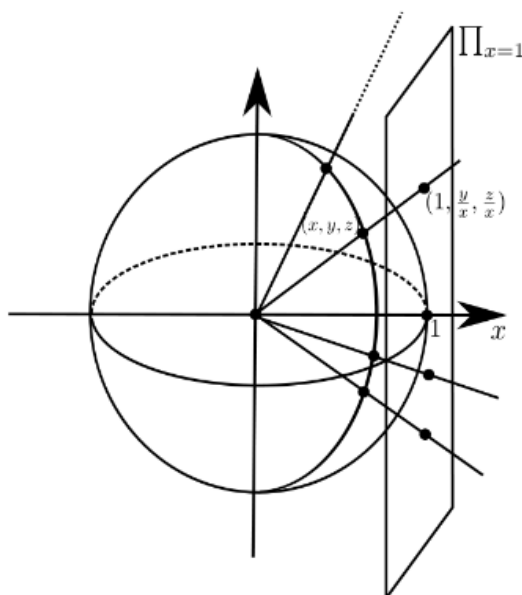


Figura 3 - Projeção de Perspectiva.

Como $(x, y, z) \in S^2$ é mapeado para $\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \approx \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \Pi_{x=1}$, isto consiste em uma

divisão simples pela coordenada x . Observe que o mapeamento tende ao infinito quando $x \rightarrow 0$ e não está definido quando $x=0$. Então definimos a perspectiva apenas para pontos da esfera com coordenada $x > 0$.

Uma vez que queremos um mapeamento do domínio equirretangular para um plano, temos que converter a fórmula acima para coordenadas de longitude/latitude: dados $(x, y, z) \in S^2, x > 0$, existe $(\lambda, \varphi) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ onde $(x, y, z) = (\cos(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ e a projeção de perspectiva é

$$(\cos(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \rightarrow \left(1, \frac{\sin(\lambda)\cos(\varphi)}{\cos(\lambda)\cos(\varphi)}, \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\lambda)\cos(\varphi)}\right) = \left(1, \tan(\lambda), \frac{\tan(\varphi)}{\cos(\lambda)}\right).$$

Logo, a fórmula final para a projeção de perspectiva é:

$$P: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\lambda, \varphi) \rightarrow (u, v) = \left(\tan(\lambda), \frac{\tan(\varphi)}{\cos(\lambda)}\right)$$

A figura 4 é um resultado desta projeção.



Figura 4 - Uma imagem em perspectiva (CDV = 90°La 120°Lo).

Definição.1: Um difeomorfismo $\varphi: S \rightarrow S$ é um *mapeamento conforme* se, para todo $p \in S$ e para todo $v_1, v_2 \in T_p S$ é verdade

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle = \Theta^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle$$

onde Θ^2 é uma função diferenciável que nunca zera.

De [5], temos que, se um mapeamento é conforme, ele preserva ângulos e orientação.

Projeção Estereográfica

A construção geométrica da projeção estereográfica é a seguinte: a esfera visível é projetada no plano $x=1$ (como a projeção de perspectiva) através de linhas que emanam do polo oposto ao plano de tangência, $(-1, 0, 0)$ neste caso. Então ela é essencialmente a

projeção de perspectiva mas com linhas vindo de $(-1, 0, 0)$ em vez de $(0, 0, 0)$, como mostra a figura 5.

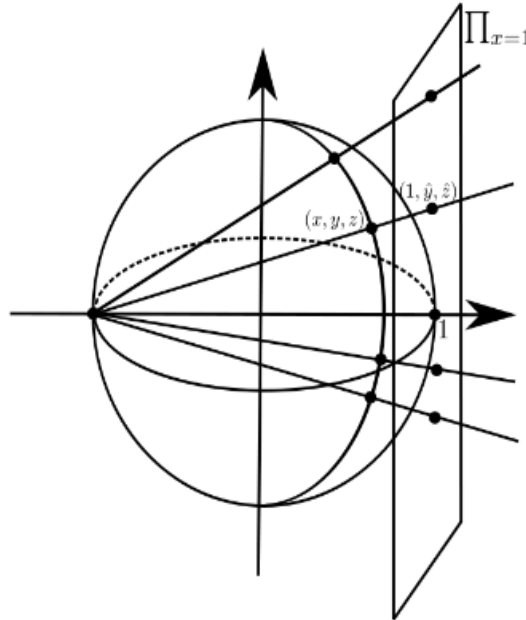


Figura 5 - Projeção Estereográfica.

Se $(1, \hat{y}, \hat{z})$ é a projeção de $(x, y, z) \in S^2$, por similaridade de triângulos nós obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\hat{y}}{2} = \frac{y}{x+1}, \quad \frac{\hat{z}}{2} = \frac{z}{x+1}.$$

Então $(x, y, z) \in S^2$ é mapeado para $(1, \frac{2y}{x+1}, \frac{2z}{x+1}) \approx (\frac{2y}{x+1}, \frac{2z}{x+1}) \in \Pi_{x=1}$. Observe que o mapeamento não está definido em $(-1, 0, 0)$, o polo oposto ao plano tangente. Em coordenadas latitude/longitude temos:

$$(\cos(\lambda) \cos(\varphi), \sin(\lambda) \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \rightarrow \left(1, \frac{2 \sin(\lambda) \cos(\varphi)}{\cos(\lambda) \cos(\varphi) + 1}, \frac{2 \sin(\lambda)}{\cos(\lambda) \cos(\varphi) + 1}\right)$$

Então a fórmula final da projeção estereográfica é:

$$S: (-\pi, \pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus (-\pi, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, \varphi) \rightarrow (u, v) = \left(\frac{2 \sin(\lambda) \cos(\varphi)}{\cos(\lambda) \cos(\varphi) + 1}, \frac{2 \sin(\lambda)}{\cos(\lambda) \cos(\varphi) + 1}\right)$$

De [5] temos que a projeção estereográfica é uma projeção conforme.

A figura 7 é um resultado desta projeção sobre a figura 6.



Figura 6 - "Berlin", imagem equiretangular obtida pelo usuário do Flickr [8], em [6].



Figura 7 - Projeção estereográfica da imagem da Figura 6 (CDV = 150°La 300°Lo).

Projeção de Mercator

Esta projeção foi apresentada pelo cartógrafo e geógrafo flamengo Gerardus Mercator, em 1569, apenas com propósitos cartográficos em mente.

É uma projeção cilíndrica, o que significa que a coordenada u varia linearmente com a longitude e é conforme. Sua fórmula é a seguinte (demonstração em [5]):

$$M: (-\pi, \pi) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}^2, (\lambda, \varphi) \rightarrow (u, v) = \left(\lambda, \log(\sec(\varphi) + \tan(\varphi)) \right)$$

Observe que o mapeamento tende ao infinito quando $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$.

A figura 9 é uma projeção de Mercator sobre a figura 8.



Figura 8 - "Wroclaw", imagem equiretangular obtida pelo usuário do Flickr [8], em [6].



Figura 9 - Projeção de Mercator da imagem da Figura 8 (CDV = 170° La 360° Lo).

4. Transformações de Möbius

Definição.1: Um mapeamento $S:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ da forma $S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ é chamado de uma transformação linear fracionária. Se a, b, c, d também satisfazem $ad-bc\neq 0$ então $S(z)$ é chamada Transformação de Möbius.

Se S é uma transformação de Möbius então $S^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$ satisfaz $S\circ S^{-1}(z)=S^{-1}\circ S(z)=z$; isto é S^{-1} é o mapeamento inverso de S . Se S e T são ambas transformações lineares fracionárias então segue que $S\circ T$ também é. Logo, o conjunto dos mapeamentos de Möbius formam um grupo sob composição. Este artigo tratará somente das transformações lineares fracionárias que são transformações de Möbius.

1. A Esfera de Riemann

Sabendo que a projeção estereográfica é conforme (demonstração em [5]), leva círculos para círculos e linhas (demonstração em [3]) e é uma bijeção se excluirmos o ponto de vista, podemos identificar, via projeção estereográfica, pontos no plano complexo com pontos da esfera visível. Definindo ∞ como sendo correspondente ao ponto de onde emanam as linhas da projeção, obtemos assim um mapeamento contínuo $SP:S^2\rightarrow\mathbb{C}_\infty$, que possui também inversa contínua $SP^{-1}:\mathbb{C}_\infty\rightarrow S^2$. Esta forma de interpretar o plano complexo em uma esfera foi construída por Riemann e recebe o nome de *esfera de Riemann*. Em nosso trabalho, consideraremos nossa esfera visível como sendo uma esfera de Riemann com ∞ sendo o ponto oposto ao plano da projeção.

2. Resultados Básicos

É Conforme: Preserva Círculos, Ângulos e Simetria

De [1] e [2] temos que transformações de Möbius são conformes e preservam círculos, ângulos e simetria.

Decomposição Em Transformações Mais Simples

Proposição.1: Se S é uma transformação de Möbius então S é a composição de translações, dilatações e inversão. (Obviamente, alguns desses podem ser omitidas).

Demonstração: Primeiro, suponha $c=0$. Logo $S(z)=(a/d)z+(b/d)$ então se $S_1(z)=(a/d)z$, $S_2(z)=z+(b/d)$, então $S_2 \circ S_1 = S$ e terminamos.

Agora tome $c \neq 0$ e faça $S_1(z)=z+d/c$, $S_2(z)=1/z$, $S_3(z)=\frac{(bc-ad)}{c^2}z$,
 $S_4(z)=z+a/c$. Então $S=S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$. ■

Proposição.2: As transformações de Möbius são bijeções em \mathbb{C}_∞ .

Demonstração: A translação $z \rightarrow z+k, \infty \rightarrow \infty$ é claramente uma bijeção com inversa $z \rightarrow z-k, \infty \rightarrow \infty$.

A expansão $z \rightarrow kz, \infty \rightarrow \infty$ é claramente uma bijeção com inversa $z \rightarrow z/k, \infty \rightarrow \infty$.

A inversão $z \rightarrow 1/z, 0 \rightarrow \infty, \infty \rightarrow 0$ é uma bijeção que é ela mesma.

Como todas as combinações destas são bijeções e transformações de Möbius são combinações destas, temos que elas são, também, bijeções. ■

Pontos Fixos

Pontos fixos são os pontos que satisfazem a seguinte condição: $S(z)=z$. Se z satisfaz essa condição, então

$$cz^2+(d-a)z-b=0.$$

Logo, uma transformação de Möbius pode ter no máximo dois pontos fixos a menos que $S(z)=z$ para todo z .

Agora tome S sendo uma transformação de Möbius e tome p, q, s pontos distintos em \mathbb{C}_∞ com $\tilde{p}=S(p)$, $\tilde{q}=S(q)$, $\tilde{s}=S(s)$. Suponha que T é outro mapeamento com essa propriedade. Então $T^{-1} \circ S = \text{Identidade}$. Isto é, $S=T$. Logo, um mapeamento de Möbius é unicamente determinado por suas ações em quaisquer três pontos em \mathbb{C}_∞ .

Faça z_1, z_2, z_3 pontos em \mathbb{C}_∞ . Defina $S: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$S(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) / \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) \quad \text{se } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C};$$

$$S(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \quad \text{se } z_1 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} \quad \text{se } z_2 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \quad \text{se } z_3 = \infty.$$

Em qualquer caso $S(z_1)=1, S(z_2)=0, S(z_3)=\infty$ e S é a única transformação possuindo essa propriedade.

Cross Ratio

Definição.2: Se $z \in \mathbb{C}_\infty$ então (z, z_1, z_2, z_3) (O *cross ratio* de z, z_1, z_2 e z_3) é a imagem de z sob a transformação de Möbius única que leva z_1 para 1, z_2 para 0 e z_3 para ∞ .

Isto é:

$$M(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad \text{se } M(z_1)=1, M(z_2)=0, \text{ e } M(z_3)=\infty.$$

Proposição.3: Se z_1, z_2, z_3 são pontos distintos e T é uma transformação de Möbius qualquer e $T(z_i) = w_i, i=1, 2, 3$, então

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$$

para qualquer ponto z .

Demonstração: Tome $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$; então S é um mapeamento de Möbius. Se $M = S \circ T^{-1}$, então $M(w_1)=1, M(w_2)=0, M(w_3)=\infty$; logo, $S \circ T^{-1}(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$. Em particular, se $z = w$ segue o resultado desejado. ■

Proposição.4: Se z_1, z_2, z_3 são pontos distintos em \mathbb{C}_∞ e w_1, w_2, w_3 também são pontos distintos de \mathbb{C}_∞ , então existe uma e apenas uma transformação de Möbius S tal que $S(z_1)=w_1, S(z_2)=w_2, S(z_3)=w_3$.

Demonstração: Tome $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, $M(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$ e faça $S = M^{-1} \circ T$. Claramente S tem a propriedade desejada. Se R é outro mapeamento de Möbius com $R(z_j) = w_j$ para $j=1, 2, 3$ então $R^{-1} \circ S$ possui três pontos fixos (z_1, z_2, z_3) . Logo, $R^{-1} \circ S = 1$, ou $S = R$. ■

Da definição e das propriedades acima provadas, podemos dizer então que para $z_i, w_i \in \mathbb{C}_\infty, i=1,2,3$, existe uma, e apenas uma transformação de Möbius M , tal que

$$M(z_i) = w_i; \quad e \quad \frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}. \quad (1)$$

5. Otimização de Imagens e Transformações de Möbius

Inspirados no artigo [4], onde os autores exploram transformações de Möbius hiperbólicas (para mais informações sobre a classificação das transformações, veja [2]) na otimização de imagens panorâmicas, neste artigo trabalhamos com o caso geral das transformações.

Dada uma transformação de Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, utilizamos a ideia gerada pelo cross ratio de que uma transformação pode ser definida por pontos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 , onde $w_i = M(z_i), i=1,2,3$, fazendo com que o usuário insira três pares de coordenadas (entrada e saída) no domínio equirretangular e calculamos o valor das constantes a, b, c, d no espaço complexo estendido que gera o resultado desejado. Para encontrar tais constantes temos a seguinte proposição:

Proposição.5: Dada uma transformação de Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, que $(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$ onde $w_i = M(z_i)$ para $i=1,2,3$ temos:

$$a = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & w_1 & 1 \\ w_2 z_2 & w_2 & 1 \\ w_3 z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & w_1 \\ w_2 z_2 & z_2 & w_2 \\ w_3 z_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad c = \det \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & 1 \\ w_2 z_2 & z_2 & 1 \\ w_3 z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Podemos reescrever a equação da transformação de Möbius da seguinte forma, tomando $w = M(z), cwz - az + dw - b = 0$.

Sabemos também que a equação passa nos pares de pontos (z_i, w_i) e no par (z, w) então podemos montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} cwz - az + dw - b &= 0 \\ cw_1 z_1 - az_1 + dw_1 - b &= 0 \\ cw_2 z_2 - az_2 + dw_2 - b &= 0 \\ cw_3 z_3 - az_3 + dw_3 - b &= 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo-o em forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} wz & -z & w & -1 \\ w_1 z_1 & -z_1 & w_1 & -1 \\ w_2 z_2 & -z_2 & w_2 & -1 \\ w_3 z_3 & -z_3 & w_3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uma vez que não queremos a solução trivial, temos que $\det \begin{vmatrix} wz & -z & w & -1 \\ w_1 z_1 & -z_1 & w_1 & -1 \\ w_2 z_2 & -z_2 & w_2 & -1 \\ w_3 z_3 & -z_3 & w_3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Expandindo o determinante acima por cofatores na primeira linha, temos que:

$$\begin{aligned} & wz \cdot \det \begin{vmatrix} -z_1 & w_1 & -1 \\ -z_2 & w_2 & -1 \\ -z_3 & w_3 & -1 \end{vmatrix} + z \cdot \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & w_1 & -1 \\ w_2 z_2 & w_2 & -1 \\ w_3 z_3 & w_3 & -1 \end{vmatrix} + w \cdot \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & -z_1 & -1 \\ w_2 z_2 & -z_2 & -1 \\ w_3 z_3 & -z_3 & -1 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & -z_1 & w_1 \\ w_2 z_2 & -z_2 & w_2 \\ w_3 z_3 & -z_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \\ & wz \cdot \det \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} - z \cdot \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & w_1 & 1 \\ w_2 z_2 & w_2 & 1 \\ w_3 z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} + w \cdot \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & 1 \\ w_2 z_2 & z_2 & 1 \\ w_3 z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & w_1 \\ w_2 z_2 & z_2 & w_2 \\ w_3 z_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Mas isto é uma nova forma de escrever a equação $cwz - az + dw - b = 0$, logo

$$a = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & w_1 & 1 \\ w_2 z_2 & w_2 & 1 \\ w_3 z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, b = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & w_1 \\ w_2 z_2 & z_2 & w_2 \\ w_3 z_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}, c = \det \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}, d = \det \begin{vmatrix} w_1 z_1 & z_1 & 1 \\ w_2 z_2 & z_2 & 1 \\ w_3 z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

Uma vez com as constantes a, b, c, d em mãos, geramos alguns resultados que podem ser vistos na seção abaixo.

6. Discussão dos Resultados

Para um melhor entendimento do que está acontecendo com as imagens, para cada um dos resultados a seguir, os pontos verdes representam os pontos especificados na imagem de entrada e os azuis são os pontos especificados na imagem de saída.

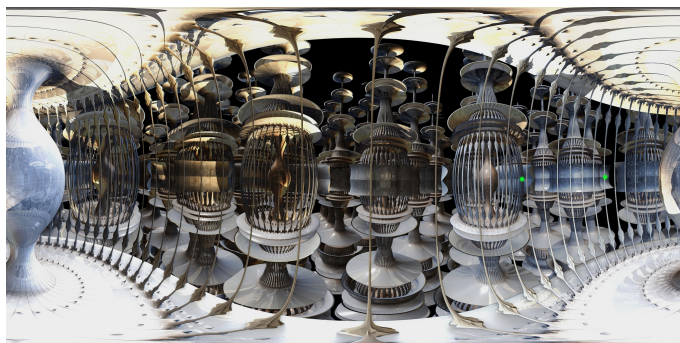


Figura 10 - "Caged", do usuário do Flickr Bernd Kronmueller, em [6].

Começamos então com um caso simples, uma translação pura (no domínio equirretangular): movemos os 3 pontos verdes na Figura 10 para novas posições em azul na Figura 11. O restante dos pontos é movido de acordo com a transformação de Moebius determinada por estes 3 pontos na entrada e na saída.

Vemos que neste caso, a transformação corresponde às expectativas.

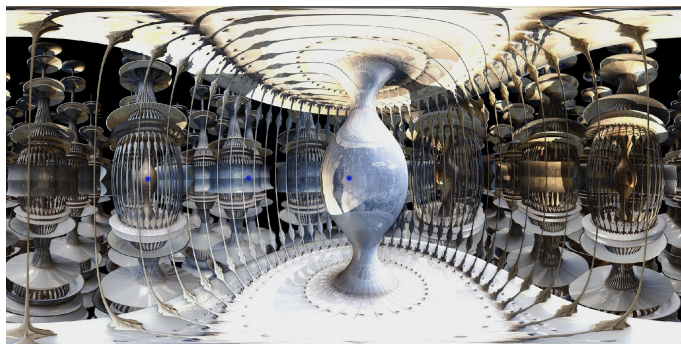


Figura 11 - Resultado de uma translação pura.

Agora, aplicando uma translação seguida de uma correção de curvatura no objeto que é transladado para o centro da figura 8 (aqui colocamos os pontos verdes e pontos azuis na mesma imagem, a da Figura 12).



Figura 12 - Resultado de uma translação seguida de correção.

Podemos ver uma grande distorção nos pontos longe do centro da imagem, problema que pode ser corrigido (se for de interesse) efetuando um corte na imagem, como mostra a figura 13.



Figura 13 - Imagem corrigida e recortada ($CDV = 30^\circ$ La 90° Lo).

Partindo para casos mais complexos, efetuamos uma correção na distorção da mesa situada no centro da figura 2 e depois efetuamos um corte na imagem resultante.

Podemos ver uma grande distorção nos pontos distantes do centro (que pode ser um resultado não esperado).



Figura 14 - Resultado da correção na mesa central.

Após o corte podemos ver uma distorção muito similar à causada pela projeção estereográfica. Note também que o campo de visão é próximo de 150° latitude e mais de 270° longitude.



Figura 15 - Imagem resultante do corte (CDV = 120° La 3270° Lo).

Para o caso em que estudamos a correção em imagens com pessoas, utilizamos a seguinte imagem:



Figura 16 - “Pake and Julie at their antique store Antique Alley at 1030 Queen Street in Honolulu, Hawaii - A 360 degree VR”, do usuário do Flickr Norman Kaleomokuokanalu Chock, em [6].

Buscamos centralizar o senhor da imagem e ampliá-lo (ou reduzi-lo) por um escalar k através da atribuição de 3 pontos em volta do objetivo. No caso, usamos $k=3$ na figura 17

e $k=\frac{1}{3}$ na figura 18.



Figura 17 - Imagem aumentada por um fator 3 (CDV = 60° La 360° Lo).



Figura 18 - Imagem diminuída por um fator $1/3$ (CDV = total).

Podemos ver uma grande distorção nos pontos distantes do centro (algo frequente nas transformações).

Para mais resultados, veja o link onde disponibilizamos o algoritmo das transformações [7].

7. Considerações Finais

Através da construção de conceitos físicos em modelos matemáticos, como a esfera visível e a própria imagem panorâmica, investigamos uma maneira de corrigir distorções neste tipo de imagens. No nosso caso, essa maneira foi números complexos e transformações de Möbius, que mostrou resultados satisfatórios (como a figura 15) e abriu possibilidades para trabalhos futuros, como encontrar maneiras de gerar transformações de Möbius com mais pontos de entrada (encontrando a transformação mais próxima do resultado esperado). Com os resultados gerados, também é possível imaginar possibilidades artísticas para as

transformações de Möbius, uma vez que as distorções causadas por elas não são comuns ou triviais.

8. Agradecimentos

Nossos agradecimentos ao PICME e ao CNPq como órgãos organizadores e financiadores do programa de iniciação científica em matemática. Um agradecimento à coordenação do curso de matemática da UFSC pelo apoio estrutural para a realização deste trabalho. E, é claro, um agradecimento aos amigos e familiares que nos ajudaram e apoiaram na busca deste objetivo.

9. Referências

- [1] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1978. 317 p.
- [2] NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. Nova Iorque: Oxford University Press, 2000. 592 p;
- [3] OLSEN, J. *The Geometry of Möbius Transformations*. Nova Iorque. Universidade de Rochester. 2010;
- [4] PEÑARANDA, L.; VELHO, L.; SACHT, L. K. *Real-time Correction of Panoramic Images Using Hyperbolic Möbius Transformations*. Rio de Janeiro. IMPA. 2015.
- [5] SACHT, L. K. *Content-based Projections for Panoramic Images and Videos*. 2010. 156 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – IMPA, Rio de Janeiro. 2010;
- [6] “Flickr: Equirectangular.” URL: <http://www.flickr.com/groups/equirectangular/>.
- [7] Link do algoritmo: <http://mtm.ufsc.br/~leo/moebius.html>.
- [8] Link do usuário: <https://www.flickr.com/photos/rueike/>.