Processamento de Imagens no Domínio de Fourier - Aula 1

Leonardo Koller Sacht

Universidade Federal de Santa Catarina
Escola de Verão MTM 2021

leonardo.sacht@ufsc.br

8 de fevereiro de 2021

Página do minicurso

Material complementar disponível em

`http://mtm.ufsc.br/~leo/fourier`

Cronograma

- Aula 1: funções periódicas, séries de Fourier, aproximações finitas, fenômeno de Gibbs.

Cronograma

- Aula 1: funções periódicas, séries de Fourier, aproximações finitas, fenômeno de Gibbs.
- Aula 2: transformada de Fourier e inversa, propriedades básicas, imagens como funções e transformada de Fourier para domínios 2D.

Cronograma

- Aula 1: funções periódicas, séries de Fourier, aproximações finitas, fenômeno de Gibbs.
- Aula 2: transformada de Fourier e inversa, propriedades básicas, imagens como funções e transformada de Fourier para domínios 2D.
- Aula 3: convolução, teorema do produto, filtragem, δ de Dirac, amostragem.

Cronograma

- Aula 4: teorema de Shannon, *aliasing*, ringing, alternativas para amostragem e reconstrução.

Cronograma

- Aula 4: teorema de Shannon, *aliasing*, ringing, alternativas para amostragem e reconstrução.
- Aula 5: Apresentação do artigo

  Optimized Quasi-Interpolators for Image Reconstruction. IEEE Transactions on Image Processing, Volume 24, Issue 12, December 2015.

  de Leonardo Sacht e Diego Nehab.

Funções periódicas

Definição: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função periódica se existe um número T real, $T > 0$, tal que:

$$f(t + T) = f(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor T que satisfaz a condição acima, caso exista, será chamado de período da função.

Funções periódicas - Exemplos

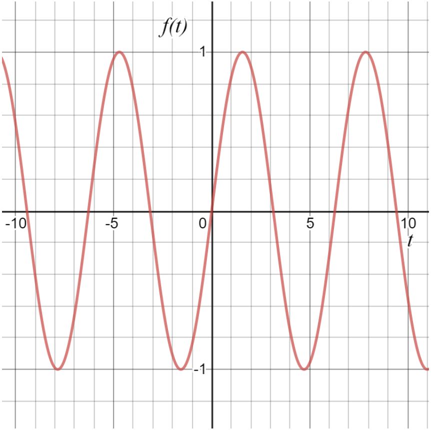


Figura: $f(t) = sen(t)$. Período: $T = 2\pi$, frequência: $\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$.
Créditos: Bernardo Martorano.

Funções periódicas - Exemplos

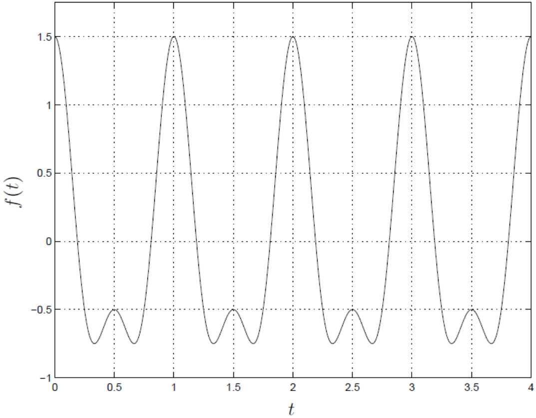


Figura: $f(t) = cos(2\pi t) + \frac{1}{2}cos(4\pi t)$. Período: $T = 1$, frequência: $\omega = \frac{1}{T} = 1$. Créditos: Brad Osgood.

Exercício

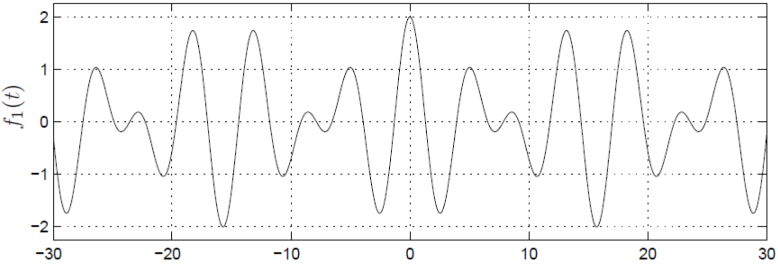


Figura: $f_1(t) = cos(t) + cos(1.4t)$. Créditos: Brad Osgood.

Exercício: É periódica? Se sim, qual é o período e a frequência?

Exercício

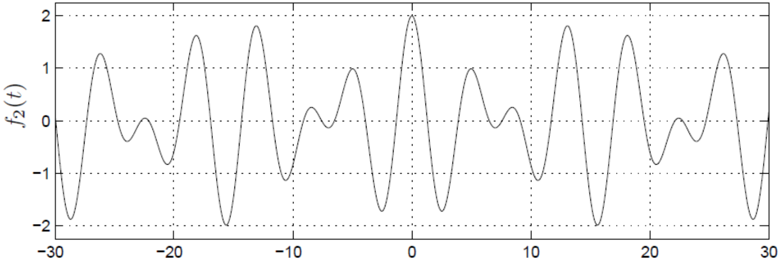
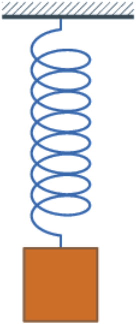


Figura: $f_2(t) = cos(t) + cos(\sqrt{2}t)$. Créditos: Brad Osgood.

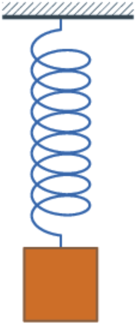
Exercício: É periódica? Se sim, qual é o período e a frequência?

Oscilador harmônico



- $x(t)$: deslocamento vertical.

Oscilador harmônico

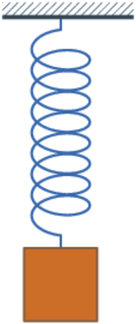


- $x(t)$: deslocamento vertical.
- Satisfaz a equação diferencial:

$$mx''(t) + Kx(t) = 0,$$

em que m é a massa e K é uma constante.

Oscilador harmônico



- $x(t)$: deslocamento vertical.
- Satisfaz a equação diferencial:

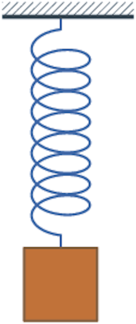
$$mx''(t) + Kx(t) = 0,$$

em que m é a massa e K é uma constante.

- Solução:

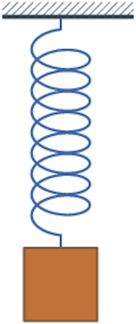
$$x(t) = c_1 cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$$

Periodicidade temporal



Periodicidade espacial

Nem tudo é periódico



com amortecimento

Séries de Fourier

Teorema: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$, f e f' são contínuas por partes então

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) + b_n sen \left(\frac{2\pi nt}{T} \right) \right)$$

em todos os pontos de continuidade de f...

Séries de Fourier

... Os coeficientes são dados por

$$a_0 = \int_0^T f(t)dt, \; a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt,$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$$

Forma complexa

Exercício: Reescreva a expressão do teorema anterior como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

em que

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{-2\pi i n t}{T}} f(t)dt.$$

Lembrete: $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Séries Fourier

<u>Exemplo:</u> Calcule a série de Fourier da extensão periódica da função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

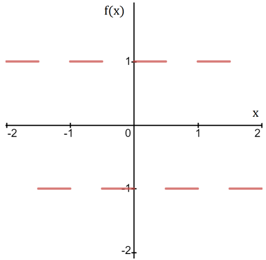


Figura: Gráfico da função. Créditos: Bernardo Martorano.

Séries Fourier

Exemplo: Calcule a série de Fourier da extensão periódica da função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

Solução: Veja os detalhes de cálculo nas notas de aula no site, páginas 4 e 5. Os coeficientes são dados por

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi i n} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Exemplo: Calcule a série de Fourier da extensão periódica da função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

Solução: Então, nos pontos em que f é contínua (dado que f tem período $T = 1$),

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int} = \sum_{n \text{ ímpar}} = \frac{2}{\pi in} e^{2\pi int}$$

$$= \ldots + 0 \underbrace{e^{2\pi i(0)t}}_{\omega=0} + \frac{2}{\pi i} \underbrace{e^{2\pi i(1)t}}_{\omega=1} + 0 \underbrace{e^{2\pi i(2)t}}_{\omega=2} + \frac{2}{3\pi i} \underbrace{e^{2\pi i(3)t}}_{\omega=3} + \ldots$$

Séries Fourier - Espectro-potência

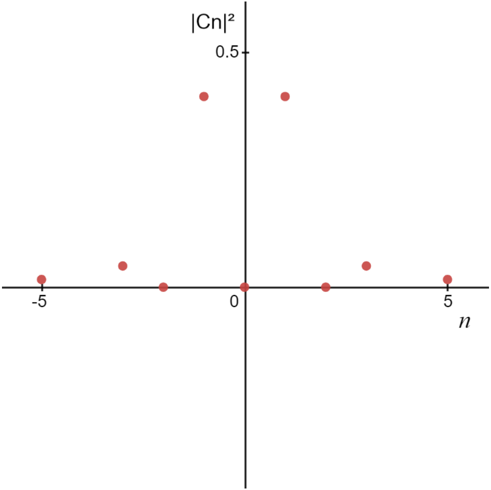


Figura: Espectro-potência da função. Créditos: Bernardo Martorano.

Séries Fourier - Aproximações finitas

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} = \sum_{n \text{ ímpar}} = \frac{2}{\pi i n} e^{2\pi i n t}$$

$$= \ldots + 0 \underbrace{e^{2\pi i (0) t}}_{\omega=0} + \frac{2}{\pi i} \underbrace{e^{2\pi i (1) t}}_{\omega=1} + 0 \underbrace{e^{2\pi i (2) t}}_{\omega=2} + \frac{2}{3\pi i} \underbrace{e^{2\pi i (3) t}}_{\omega=3} + \ldots$$

Fenômeno de Gibbs

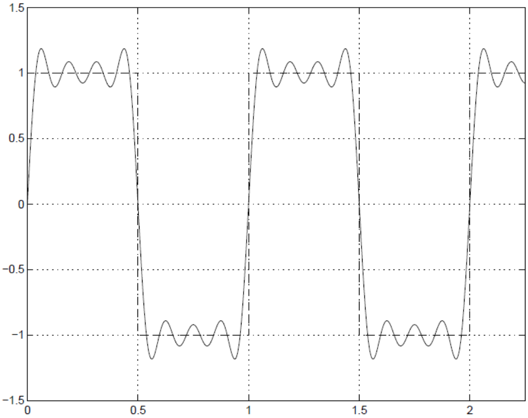


Figura: Aproximação finita com 9 termos. Créditos: Brad Osgood.

Fenômeno de Gibbs

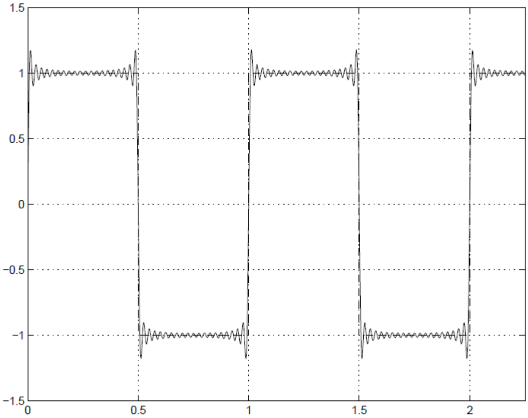


Figura: Aproximação finita com 39 termos. Créditos: Brad Osgood.