

Processamento de Imagens no Domínio de Fourier - Aula 2

Leonardo Koller Sacht

Universidade Federal de Santa Catarina
Escola de Verão MTM 2021

leonardo.sacht@ufsc.br

9 de fevereiro de 2021

- Aula passada: funções periódicas e série de Fourier.

Cronograma

- Aula passada: funções periódicas e série de Fourier.
- Próximas aulas: funções não periódicas e transformada de Fourier.

Transformada de Fourier

Definição: Seja f uma função tal que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $f \in S$.
A transformada de Fourier de f é dada por

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Obs. 1: $f \in S$ (espaço de Schwarz) se $\exists C_{mn}$ tal que
 $|x^m \frac{d^n}{dx^n} f(t)| \leq C_{mn}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Obs. 2: $\hat{f}(\omega)$ é outra função.

Transformada de Fourier - Exemplo

Exemplo: Calcule a transformada de Fourier da função

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

também conhecida como função box.

Transformada de Fourier - Exemplo

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

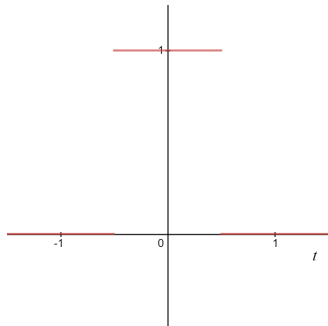


Figura: Gráfico da função Box. Créditos: Bernardo Martorano.

Transformada de Fourier - Exemplo

Exemplo: Calcule a transformada de Fourier da função

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Solução: Pelos cálculos nas notas de aula (pág. 8)

$$\hat{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}, & \omega \neq 0 \\ 1, & \omega = 0 \end{cases} = \text{sinc}(\omega).$$

Transformada de Fourier - Exemplo

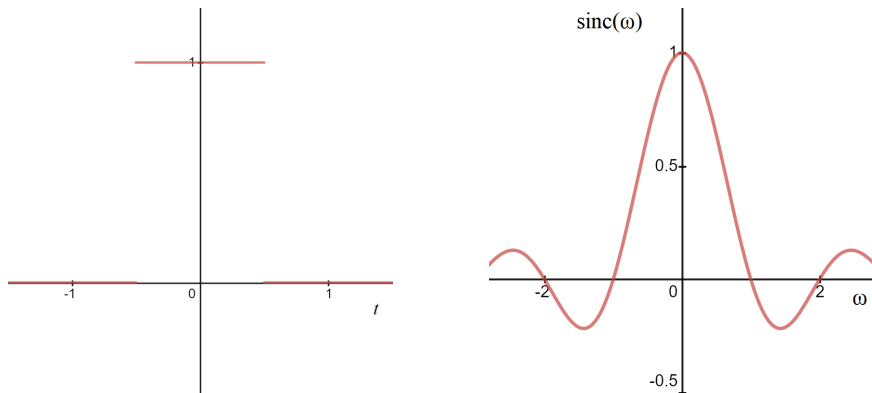


Figura: Função box e sua transformada de Fourier. Créditos: Bernardo Martorano.

Transformada de Fourier Inversa

Teorema: Se $(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$, então

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega.$$

Obs. 1: O operador $(T\hat{f})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$ é o inverso de $\mathcal{F}$, isto é, $T = \mathcal{F}^{-1}$.

Obs. 2: O teorema acima mostra que f pode ser expressa como soma (não enumerável) de funções periódicas com frequências variáveis.

Transformada vs. série de Fourier

- Funções periódicas (aula passada):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}$$

- Funções não necessariamente periódicas:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega.$$

Espectro discreto vs. espectro contínuo

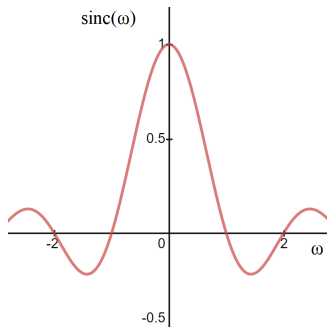
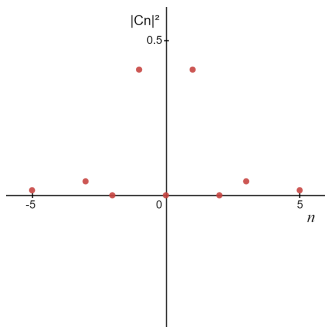


Figura: Espectro de uma função periódica e espectro de uma função não periódica. Créditos: Bernardo Martorano.

Transformada de Fourier

- Obs. 1: O conteúdo de frequência $\omega = 0$ é a média da função:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i 0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

Transformada de Fourier

- Obs. 1: O conteúdo de frequência $\omega = 0$ é a média da função:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i 0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

- Obs. 2: $f(t)$ é a função no domínio do tempo (ou do espaço).
 $\hat{f}(\omega)$ é a função no domínio de frequências (ou de Fourier).

Transformada de Fourier

- Obs. 3: Se existe ω_0 tal que $\hat{f}(\omega) = 0$, sempre que $|\omega| > \omega_0$ dizemos que f é de banda limitada.

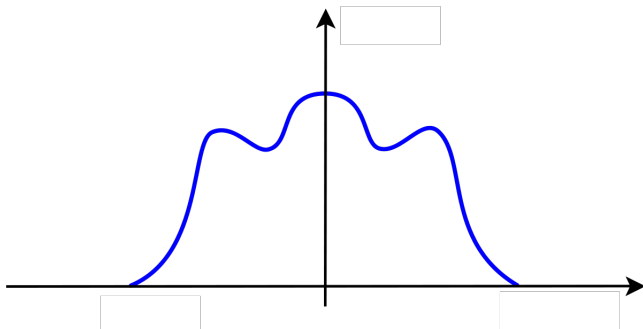


Figura: Espectro de uma função de banda limitada. Fonte: Wikipedia.

Transformada de Fourier

- Obs. 4: Identidade de Parseval:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{f}\|^2.$$

Propriedades - Transformada de Fourier

- Dualidade:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(-\omega)t} f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega t} f(t) dt = (\mathcal{F}^{-1}f)(\omega).\end{aligned}$$

Propriedades - Transformada de Fourier

- Dualidade:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(-\omega)t} f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega t} f(t) dt = (\mathcal{F}^{-1}f)(\omega).\end{aligned}$$

- Lista de exercícios: linearidade, *shift*, derivadas, funções pares ou ímpares, ...

Imagens como funções

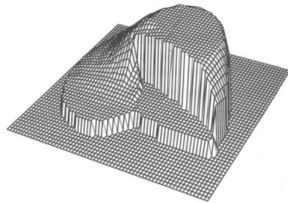
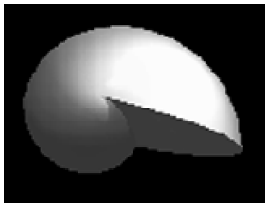


Figura: Imagem como função de domínio bidimensional. Créditos: Jonas Gomes e Luiz Velho.

Fourier em 2D

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(x\omega_1 + y\omega_2)} dx dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i x \omega_1} e^{-2\pi i y \omega_2} dx dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i x \omega_1} dx \right)}_{\text{T. Fourier em relação a } x} e^{-2\pi i y \omega_2} dy\end{aligned}$$

Transformada de Fourier de imagens

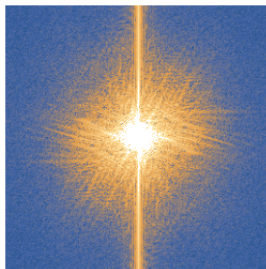


Figura: Função $f(x, y)$ e espectro-potência $|\hat{f}(\omega_1, \omega_2)|^2$.

Transformada de Fourier de imagens

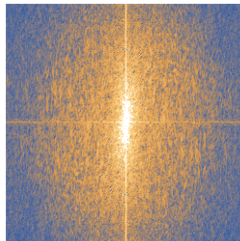
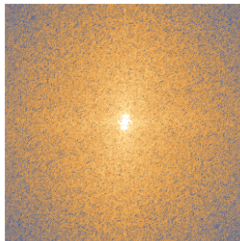
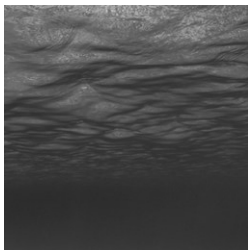


Figura: Exercício: qual é a transformada de Fourier de cada imagem?