Processamento de Imagens no Domínio de Fourier - Aula 3

Leonardo Koller Sacht

Universidade Federal de Santa Catarina
Escola de Verão MTM 2021

leonardo.sacht@ufsc.br

10 de fevereiro de 2021

Cronograma

- Aula passada: Transformada de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt.$$

e inversa

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega.$$

Cronograma

- Aula passada: Transformada de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt.$$

e inversa

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega.$$

- Aula de hoje: convolução.

Propriedades

- Linearidade:

$$\mathcal{F}(f+g)(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$$

Propriedades

- Linearidade:

$$\mathcal{F}(f+g)(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$$

- Produto:

$$\mathcal{F}(??)(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

Convolução

Definição: A convolução de duas funções g e f é dada por

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

Obs.: A convolução de duas funções resulta em uma outra função.

Convolução

Exemplo: Calcule $g * f$ para $g = f = \Pi$, em que

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

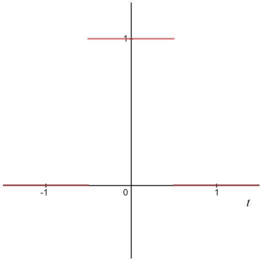


Figura: Gráfico da função Box. Créditos: Bernardo Martorano.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - x) f(x) dx.$$

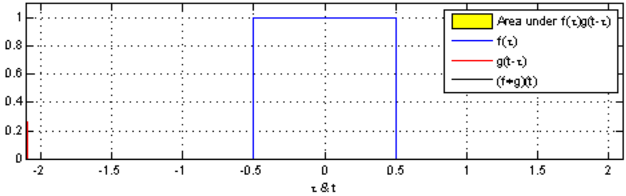


Figura: Função $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

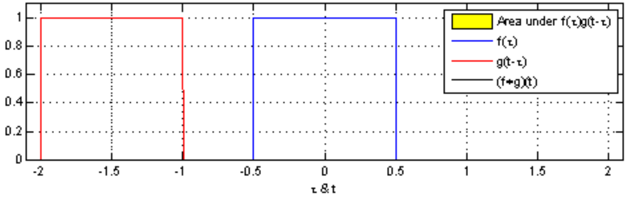


Figura: Funções $g(-1.5 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

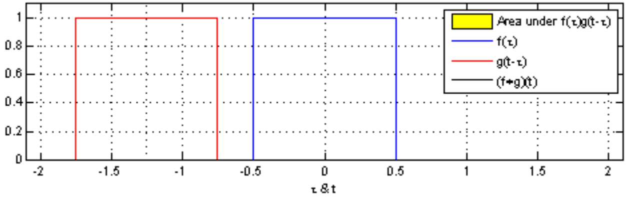


Figura: Funções $g(-1.25 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

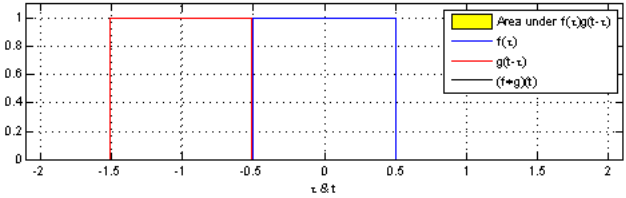


Figura: Funções $g(-1-x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

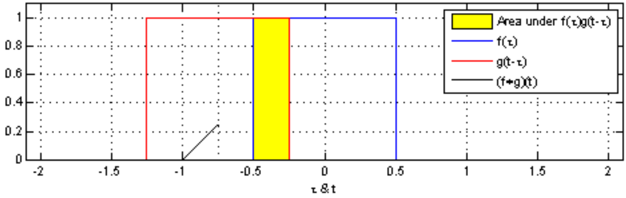


Figura: Funções $g(-0.75 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

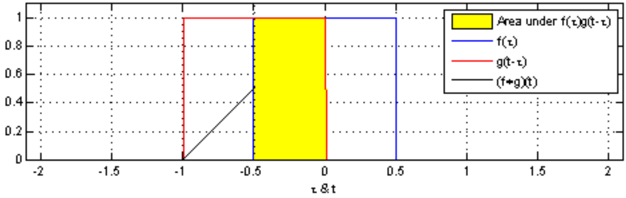


Figura: Funções $g(-0.5-x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

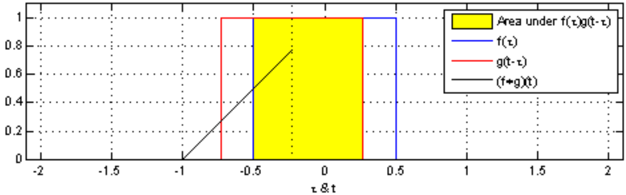


Figura: Funções $g(-0.25 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - x)f(x)dx.$$

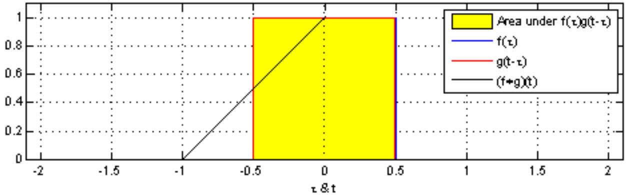


Figura: Funções $g(-0 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

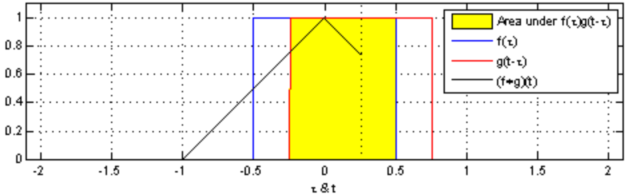


Figura: Funções $g(0.25 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - x) f(x) dx.$$

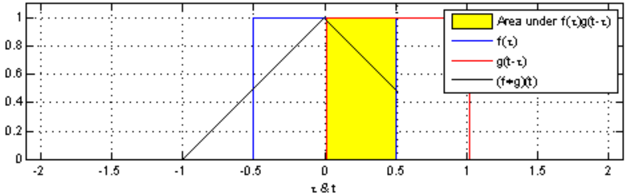


Figura: Funções $g(0.5 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

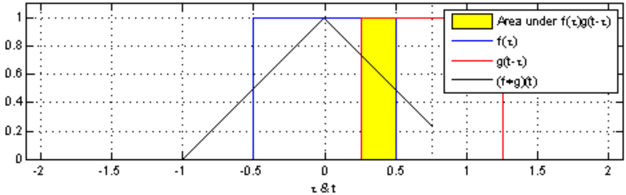


Figura: Funções $g(0.75 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

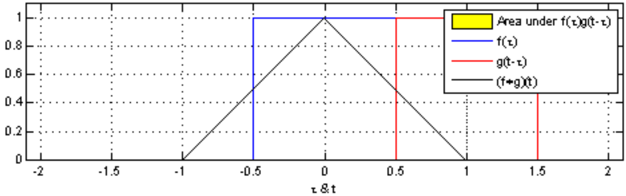


Figura: Funções $g(1-x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

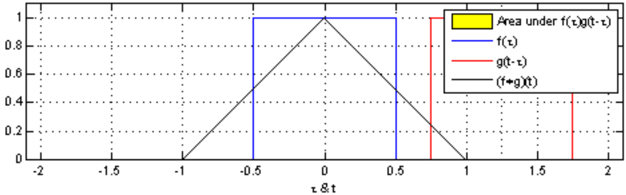


Figura: Funções $g(1.25 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

Convolução

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx.$$

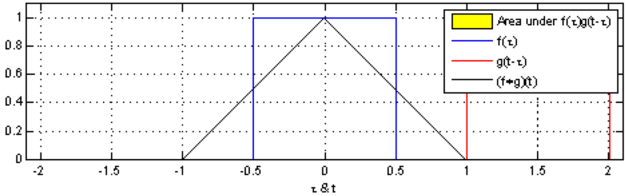


Figura: Funções $g(1.5 - x)$ e $f(x)$. Fonte: Wikipedia.

B-splines

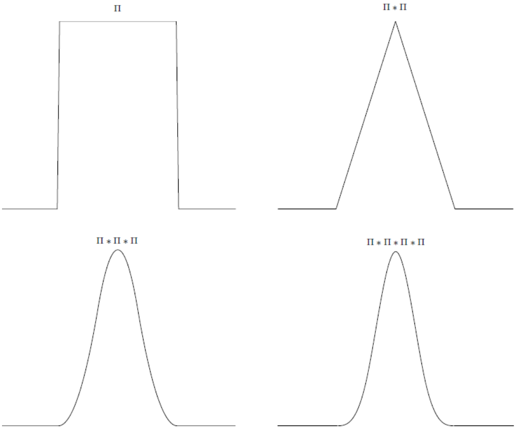


Figura: B-splines: box, linear, quadrática e cúbica. Créditos: Brad Osgood.

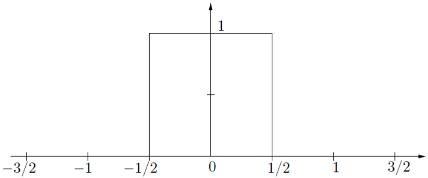
Convoluções e produtos

Exercício: Prove o *teorema do produto* para transformadas de Fourier:

- $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega),\ \forall \omega \in \mathbb{R}.$
- $\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega),\ \forall \omega \in \mathbb{R}.$

Obs.: Outras propriedades na lista de exercícios.

Convoluções e produtos



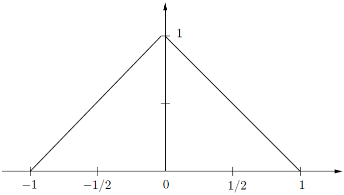


Figura: Função box $\Pi(x)$ e B-spline linear $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$.

Convoluções e produtos

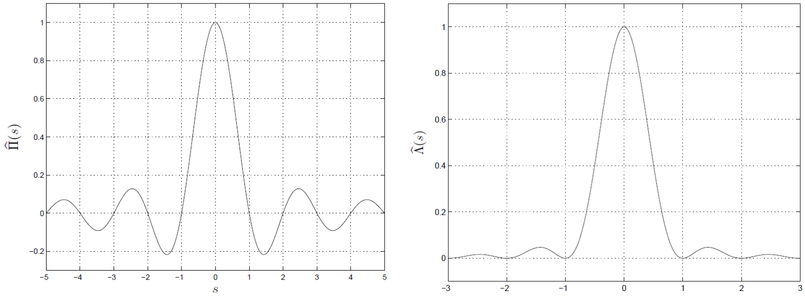


Figura: Função $\hat{\Pi}(\omega)$ e $\hat{\Lambda}(\omega) = \widehat{\Pi * \Pi}(\omega) = \hat{\Pi}(\omega) \cdot \hat{\Pi}(\omega) = \mathrm{sinc}^2(\omega)$. Créditos: Brad Osgood.

Remoção de altas frequências usando convolução

Figura: Imagem original é convoluída (filtrada) com dois filtros cuja transformada de Fourier tem valores baixos para frequências altas.

Remoção de altas frequências usando convolução

Figura: Imagem no topo é filtrada por um filtro cuja transformada de Fourier tem valores baixos para frequências altas (filtro passa-baixa).

Remoção de baixas frequências usando convolução

Figura: Imagem no topo é filtrada por um filtro cuja transformada de Fourier tem valores baixos para frequências baixas (filtro passa-alta).