Processamento de Imagens no Domínio de Fourier - Aula 4

Leonardo Koller Sacht

Universidade Federal de Santa Catarina
Escola de Verão MTM 2021

leonardo.sacht@ufsc.br

11 de fevereiro de 2021

Cronograma

- Aulas passadas: Séries e transformada de Fourier, convolução.

Cronograma

- Aulas passadas: Séries e transformada de Fourier, convolução.
- Aula de hoje: amostragem, reconstrução e Teorema de Shannon.

Função pulso

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

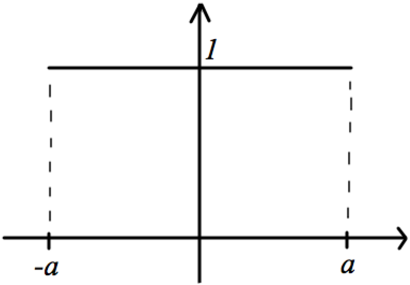
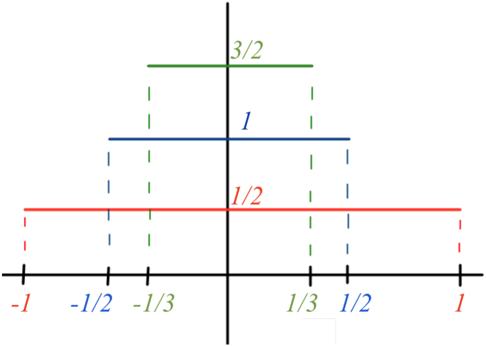


Figura: Gráfico da função pulso.

Impulso (Delta de Dirac)



$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot p_{1/n}(t)$$

Figura: Gráficos das funções $\frac{1}{2} \cdot p_{1/1}(t)$, $\frac{2}{2} \cdot p_{1/2}(t)$ e $\frac{3}{2} \cdot p_{1/3}(t)$.

Delta de Dirac: Propriedades

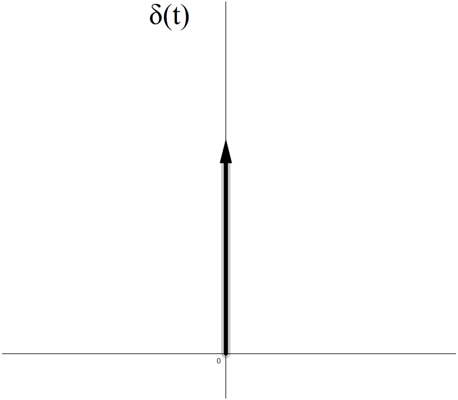


Figura: Gráfico do delta de Dirac.
Créditos: Bernardo Martorano.

- $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

Delta de Dirac: Propriedades

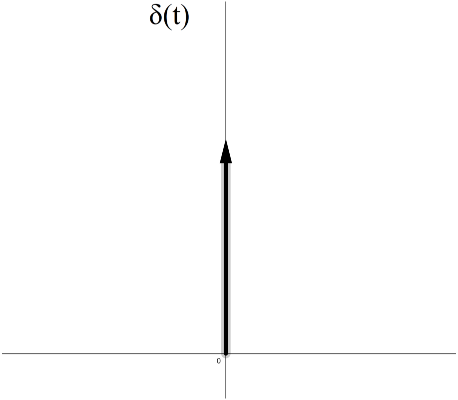


Figura: Gráfico do delta de Dirac.
Créditos: Bernardo Martorano.

- $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

Delta de Dirac: Propriedades

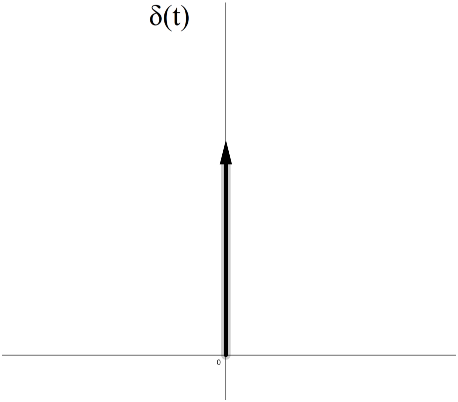


Figura: Gráfico do delta de Dirac.
Créditos: Bernardo Martorano.

- $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
- $\delta * f = f.$

Delta de Dirac: Propriedades

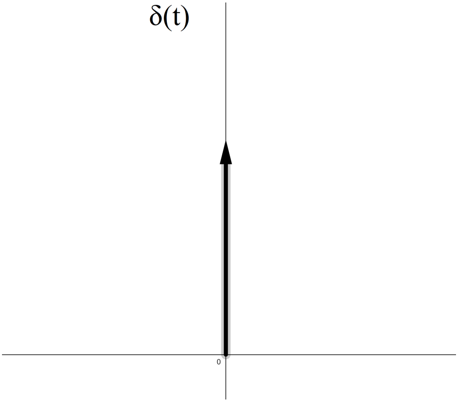


Figura: Gráfico do delta de Dirac. Créditos: Bernardo Martorano.

- $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

- $\delta * f = f.$

- $\mathcal{F}(\delta) = \hat{\delta}(\omega) = 1$

Amostragem uniforme

Multiplicação pela função pente:

$$comb_{\Delta t}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta t).$$

Δt é chamado de espaçamento de amostragem.

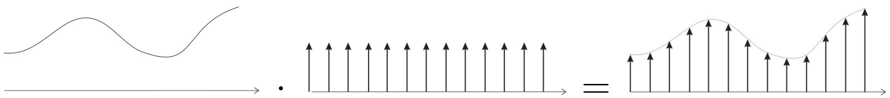


Figura: Amostragem com espaçamento uniforme.

Função pente: propriedades

$$\mathcal{F}(comb_{\Delta t})(\omega) = \frac{1}{\Delta t} comb_{\frac{1}{\Delta t}}(\omega)$$

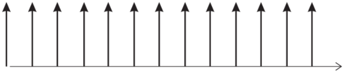



Figura: Função pente e sua transformada de Fourier.

Função pente: propriedades

$$(f * comb_{\Delta t})(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k\Delta t)$$

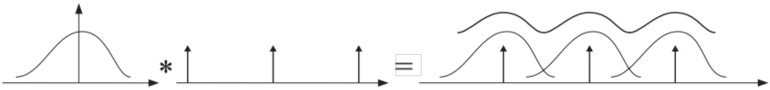


Figura: Convolução com a função pente.

Em que circunstâncias podemos recuperar exatamente $f(t)$ apenas a partir de f amostrada?

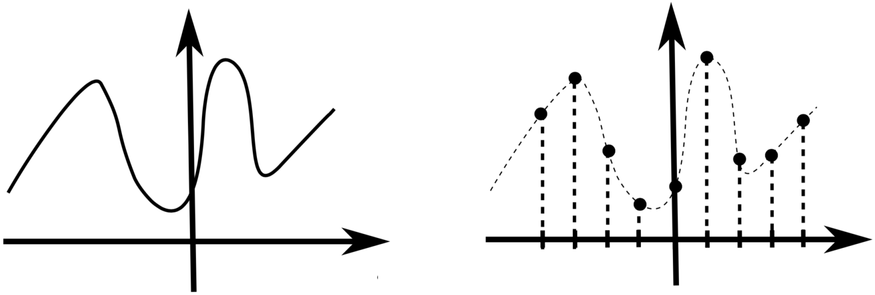


Figura: Função f e função f amostrada.

Teorema de Shannon

Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de banda limitada e Ω tal que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$. Então f pode ser reconstruída exatamente a partir de amostras com espaçamento Δt se $\Delta t < \frac{1}{2\Omega}$. Neste caso,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot sinc(\Omega(t - k\Delta t)).$$

Teorema de Shannon - Ideia da prova

Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de banda limitada e Ω tal que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$.

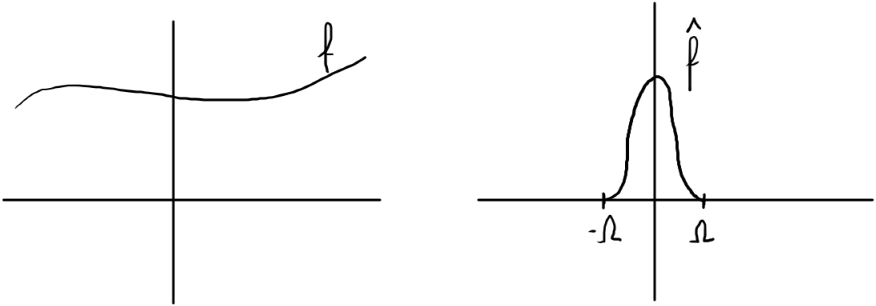


Figura: Teorema de Shannon assume função de banda limitada.

Teorema de Shannon - Ideia da prova

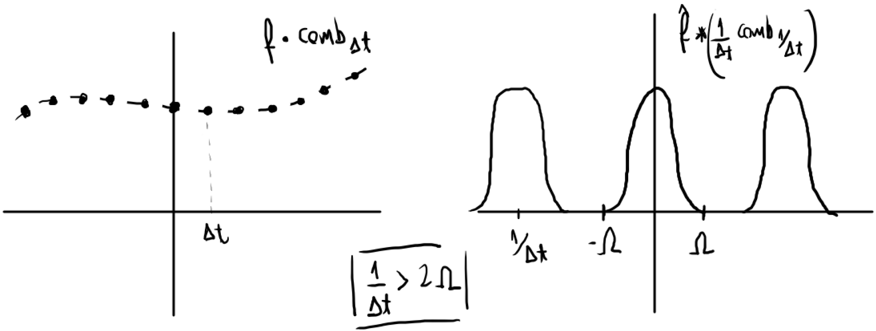


Figura: Função amostrada e transformada de Fourier.

Teorema de Shannon - Ideia da prova

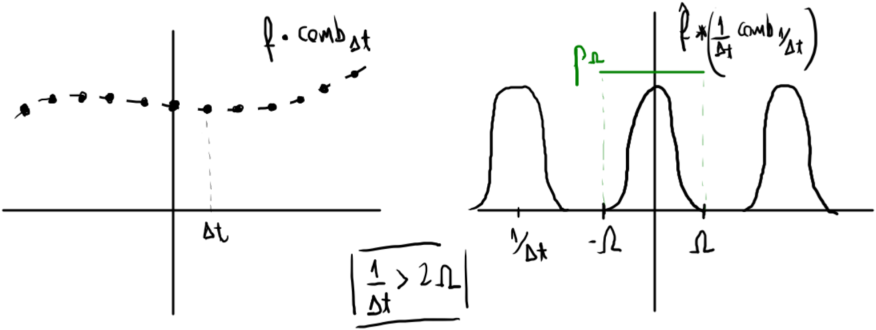


Figura: Função pulso no domínio de frequências.

Teorema de Shannon - Ideia da prova

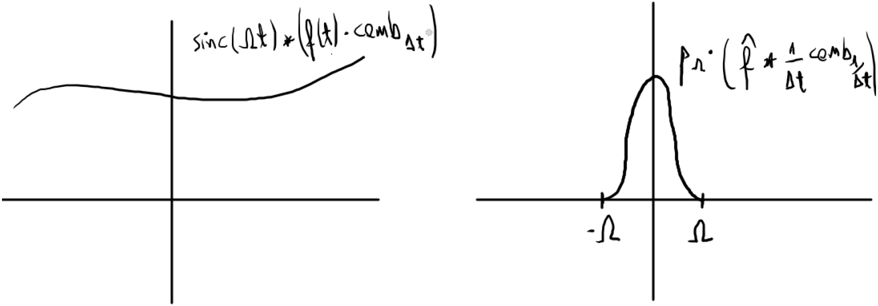


Figura: Multiplicação por função pulso no domínio de frequências recupera o espectro original sob as condições do teorema. No domínio espacial, esta multiplicação vira uma convolução com a função *sinc*.

Aliasing

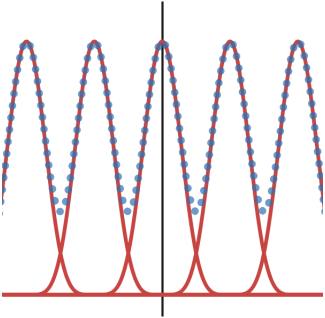


Figura: Transformada de Fourier de uma função mal amostrada. Créditos: Bernardo Martorano.

Aliasing em imagens

Figura: Imagem bem amostrada.

Aliasing em imagens

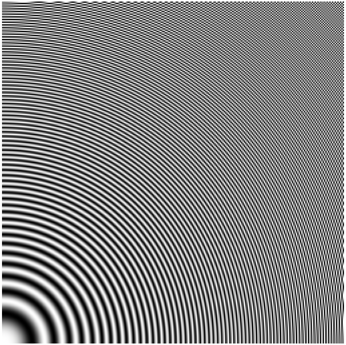


Figura: Imagem mal amostrada.

Aliasing em imagens

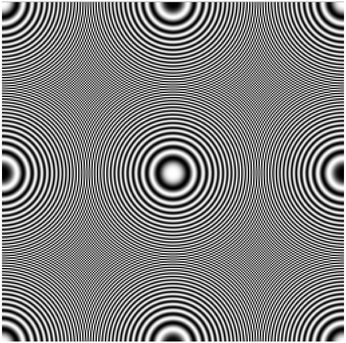


Figura: Imagem mal amostrada.

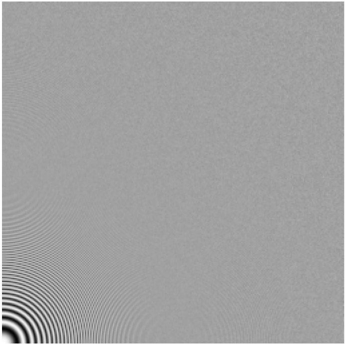


Figura: Imagem filtrada (borrada).

Aliasing em imagens

Figura: Imagem bem amostrada e mal amostrada.

Ringing

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot sinc(\Omega(t - k\Delta t)).$$

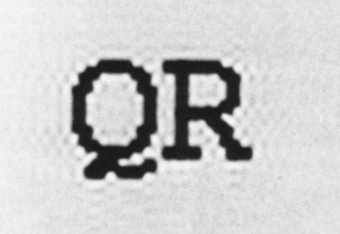


Figura: *Ringing* causado pelo truncamento da fórmula de reconstrução.