

Introdução

Durante o processo de escaneamento físico para criar modelos digitais 3D de superfícies, ruídos de alta frequência podem ocorrer nos dados. É possível aumentar a qualidade de um objeto real escaneado e reduzir o ruído suavizando a superfície. Para isso, reduzimos variações da curvatura. Intuitivamente, nós queremos mudar a curvatura da nossa superfície como o calor muda em um objeto; o calor flui de regiões quentes para as mais frias, um processo chamado de *difusão*. No nosso caso, a vizinhança de pontos com alta curvatura é movida para produzir a nova superfície. A ideia é escolher um vetor velocidade adequado em cada ponto para obter uma evolução geométrica contínua temporal para a superfície. Para isso usaremos o *Fluxo de Curvatura Média* (FCM).

Fluxo de Curvatura Média Contínuo

Dada uma superfície inicial M_0 orientável, compacta e mergulhada no $\mathbb{R}^3$, obtemos uma família de superfícies $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ com as respectivas parametrizações $\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_t \subset \mathbb{R}^3$ resolvendo a *equação de difusão geométrica*, uma equação diferencial parcial (EDP) linear dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) = \Delta_t \varphi, \quad (1)$$

onde $\Delta_t \varphi$ é o Operador Laplace-Beltrami da aplicação $\varphi(p, t)$ no tempo t e $p \in \mathbb{R}^2$.

Por um teorema de Weierstraß (veja [1]), o operador Laplace-Beltrami é dado por

$$\Delta_t \varphi = 2\vec{H}_t \quad (2)$$

onde $\vec{H}_t$ é o vetor curvatura média. Isto é, a velocidade de cada ponto da superfície é dada pelo vetor curvatura média do ponto.

Discretização do Fluxo

Representamos superfícies discretas utilizando malhas triangulares. Considere S superfície de parametrização discreta $\varphi = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_m))$ onde v_i são os vértices de uma malha em $\mathbb{R}^2$. Discretizamos o Operador Laplace-Beltrami pela Fórmula Cotangente [2] obtendo

$$\Delta \varphi = \underbrace{DM}_{\mathbf{L}} \varphi \quad (3)$$

onde D e M são matrizes obtidas com os coeficientes da Fórmula Cotangente. Para discretizar a derivada em relação ao tempo em (1) subdividimos o intervalo de tempo $\{t, t+h, t+2h, \dots\}$ e usamos aproximação por diferenças finitas.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi_{t+h} - \varphi_t}{h}.$$

onde $\varphi_t = (\varphi_t(v_1), \dots, \varphi_t(v_m))$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(v_1, t), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(v_m, t)\right)$. Resolvendo para cada φ_{t+h} e usando as equações 1 e 3 obtemos

$$\varphi_{t+h} = \varphi_t + h \mathbf{L}_t \varphi_t.$$

Uma modificação do fluxo chamada Fluxo de Curvatura Média conformalizado (FCMc) proposta em [3] é

$$(D_t^{-1} - h M_0) \varphi_{t+h} = D_t^{-1} \varphi_t.$$

Resultados

Analizamos uma implementação em [4] da Equação 1. O programa é interrompido quando a superfície converge para a esfera ou atinge o limite de iterações. Aplicamos o algoritmo à mão da figura 1 para remover as auto interseções nos dedos.

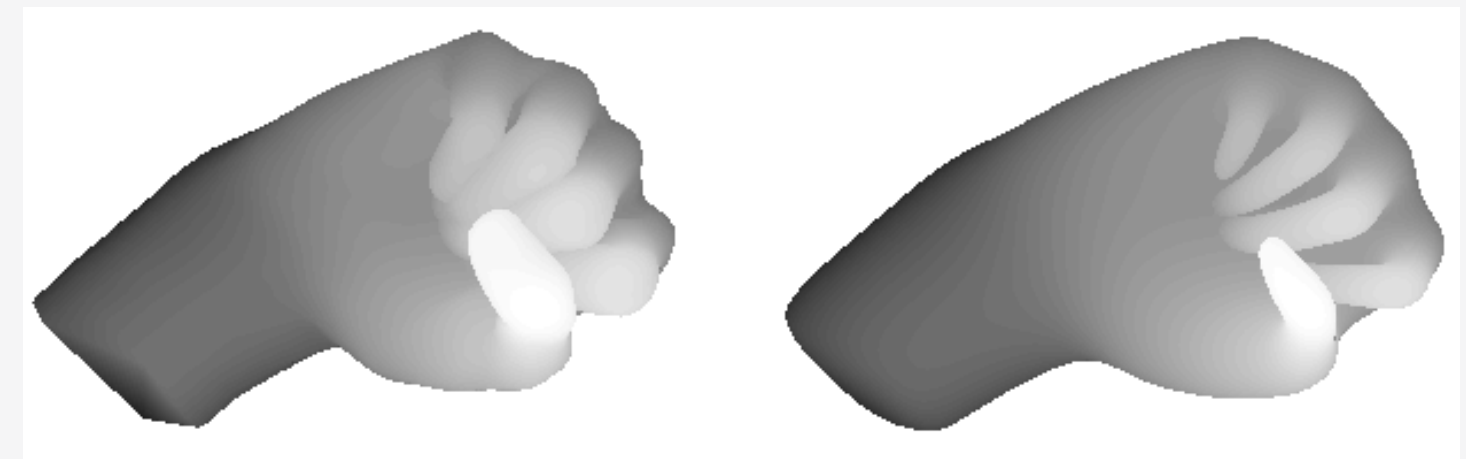


Figura 1. Imagem gerada no MATLAB.

Na figura 2 vemos a convergência após 89 iterações de uma superfície de genus 1.

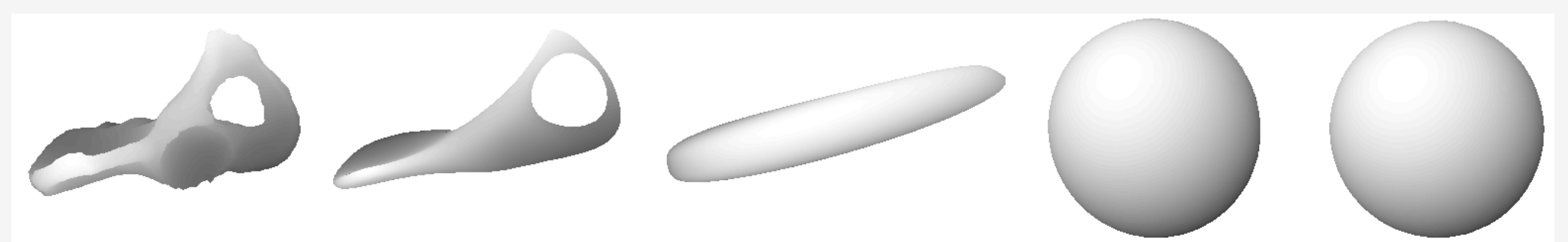


Figura 2. Figura gerada no MATLAB

É possível conjecturar que o FCMc tem convergência estável para malhas de genus zero e converge para uma parametrização *conforme* da superfície na esfera. Como vemos na Figura 3, o FCMc também evita formação de singularidades (*neck pinch* na mão).

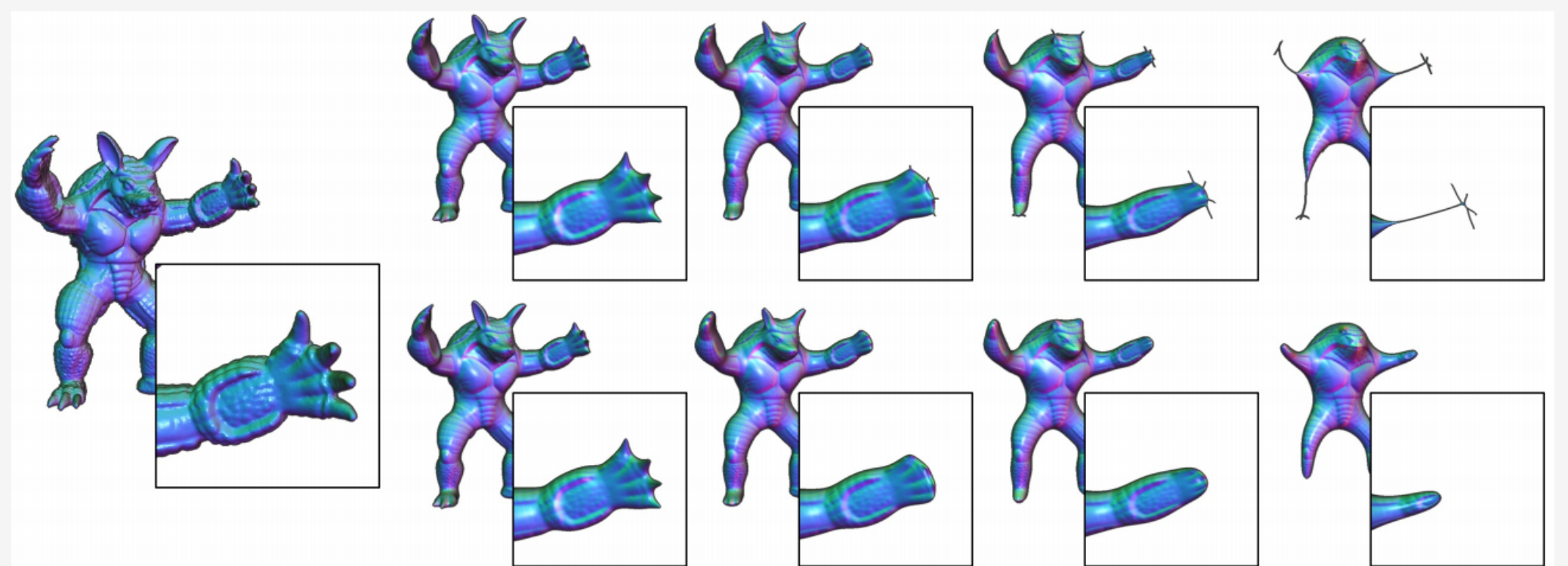


Figura 3. Acima o aplicamos o Fluxo de Curvatura Média e abaixo o conformalizado. Figura retirada de [3]

Para mais discussão de resultados, veja [5].

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por PIBIC/CNPq.

Bibliografia

- [1] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab, "Minimal surfaces," in *Minimal Surfaces I*, pp. 53–88, Springer, 1992.
- [2] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Lévy, *Polygon mesh processing*. CRC press, 2010.
- [3] M. Kazhdan, J. Solomon, and M. Ben-Chen, "Can mean-curvature flow be modified to be non-singular?," in *Computer Graphics Forum*, vol. 31, pp. 1745–1754, Wiley Online Library, 2012.
- [4] A. Jacobson *et al.*, "gptoolbox: Geometry processing toolbox," 2016. <http://github.com/alecjacobson/gptoolbox>.
- [5] M. E. Duarte and L. Sacht, "Mean curvature flow and applications," in *SIBGRAPI: WUW*, 2017.