

# Transformações Conformes da Esfera para o Plano

Mateus Souza Oliveira\*      **Leonardo Koller Sacht**†

Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática

88040-900, Campus Trindade, Florianópolis, SC

E-mail: matews1943@gmail.com, leonardo.sacht@ufsc.br.

## RESUMO

Imagens com grandes campos de visão, as ditas imagens panorâmicas, são uma maneira mais completa de representar o mundo. Com intuítos tanto práticos quanto artísticos, estas imagens apresentam distorções não naturais, as quais são o principal problema da área. Por exemplo, linhas retas do mundo aparecem curvadas na imagem, e objetos aparecem distorcidos. Consideramos estes como sendo os problemas principais nos panoramas, os quais denominamos, matematicamente, como falta de curvatura nula e de conformalidade, respectivamente. Como visto na principal referência [1], não existem funções que satisfazem ambas as características. Portanto, optamos por tentar caracterizar as transformações conformes, por acharmos que elas serão usadas de forma mais abrangente. Em suma, uma projeção é dita conforme quando preserva ângulos e proporcionalidade, e mapeia círculos em círculos.

Em nossos estudos, consideramos uma imagem panorâmica como sendo uma representação com campo visual (*field of view* em inglês, por isso usamos a sigla FOV) superior a  $180^\circ$  de longitude por  $90^\circ$  de latitude. Muitos autores não se preocupam em enfatizar isto por trabalharem com imagens que abrangem o campo de visão esférico total. Estas são as chamadas imagens equirretangulares. Os algoritmos que propomos até o momento aceitam FOVs variados, desde que respeitem os domínios das projeções em questão.

Uma outra forma de abordar as imagens equirretangulares é através da representação por longitudes e latitudes  $r : [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^2$  (em que  $\mathbb{S}^2$  é a esfera unitária centrada na origem do  $\mathbb{R}^3$ ), dada por  $(\lambda, \phi) \mapsto (\cos(\lambda) \cdot \cos(\phi), \sin(\lambda) \cdot \cos(\phi), \sin(\phi))$ . Como a aplicação  $r$  é uma bijeção, é comum tratarmos o domínio equirretangular  $([-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$  e a esfera como o mesmo objeto.

Por ser um assunto que está sendo abordado pela primeira vez, ainda não sabemos se seremos capazes de caracterizar o espaço das transformações conformes. Então, nosso objetivo atual tem sido o aperfeiçoamento de um algoritmo que usaremos para averiguar se uma projeção é ou não conforme.

Explicaremos os passos de execução desse código, além de expor alguns testes. Primeiro, o usuário indica quantos pontos irá querer na malha, a qual é uma discretização regular do domínio equirretangular (quanto mais pontos, mais próximo estamos da teoria). Depois, é escolhida a transformação, com a qual é montado o vetor da projeção, com os valores da transformação em cada ponto da malha discretizada. Nessas avaliações, escolhemos projeções clássicas da área, além da aplicação identidade. Expomos a seguir suas formas algébricas:

i) a projeção de Mercator  $M : [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é dada por  $(\lambda, \phi) \mapsto (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi)) = (\lambda, \log(\sec(\phi) + \tan(\phi)))$ .

ii) a projeção Estereográfica  $E : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é dada por  $(\lambda, \phi) \mapsto (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi)) = \left( \frac{2 \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(\phi)}{\cos(\lambda) \cdot \cos(\phi) + 1}, \frac{2 \cdot \sin(\phi)}{\cos(\lambda) \cdot \cos(\phi) + 1} \right)$ .

---

\*Graduando do curso de Matemática - Bacharelado na Universidade Federal de Santa Catarina

†Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina

- iii) a projeção Identidade  $I : [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é dada por  $(\lambda, \phi) \mapsto (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi)) = (\lambda, \phi)$ .
- iv) a projeção Perspectiva  $P : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é dada por  $(\lambda, \phi) \mapsto (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi)) = \left( \tan(\lambda), \frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda)} \right)$ .

Na teoria (e no algoritmo), usamos o teorema 1 para avaliar a conformalidade de funções.

**Teorema 1.** Sejam uma projeção  $P : \Omega \subseteq \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, P(\lambda, \phi) = (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi))$  e um ponto  $p = (\lambda, \phi)$  no interior de  $\Omega$ . A projeção  $P$  é conforme (a menos de reflexões) se, e somente se, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann na esfera:  $\frac{\partial u}{\partial \phi}(p) = -\frac{1}{\cos(\phi)} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda}(p)$  e  $\frac{\partial v}{\partial \phi}(p) = \frac{1}{\cos(\phi)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \lambda}(p)$ .

*Demonstração.* Encontra-se em [1], teorema 2.1. ■

Ressaltamos que, entre as quatro projeções apresentadas anteriormente, apenas Mercator e Estereográfica são conformes, pois são as únicas que satisfazem o teorema 1.

Por fim, é calculado o produto da matriz da discretização das equações de Cauchy-Riemann, através de diferenças finitas, com o vetor da projeção. O erro é dado pela norma do vetor resultante, que se aproxima de zero no caso das funções conformes. Expomos alguns dos testes realizados com as quatro transformações na figura 1.

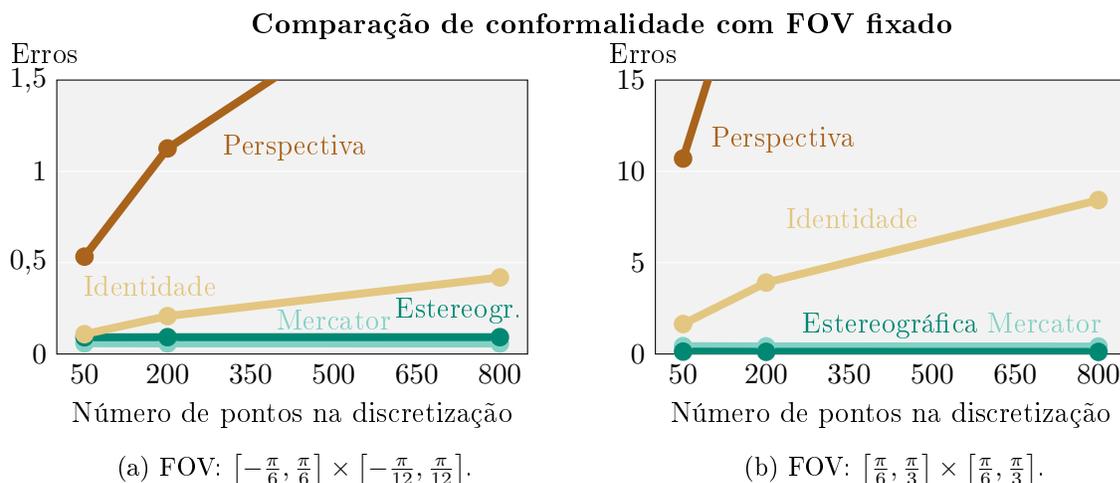


Figura 1: Mesmo com um FOV baixo (menos de 3% da área do domínio equirretangular) (a), há uma clara divergência nos valores de erro das projeções não conformes, e uma sutil convergência das conformes. Ao se deslocar o campo de visão do centro do domínio equirretangular (b), o erro produzido pelas projeções não conformes é ainda mais elevado, mesmo reduzindo a área do campo de visão pela metade.

Ao se comparar funções discretizadas com projeções conformes discretizadas, conseguimos ver se elas satisfazem ou não as equações de Cauchy-Riemann, mesmo usando uma quantidade relativamente baixa de pontos na malha (testes com 800 pontos apresentados na figura 1, levaram em média 0,03 segundos, para cada projeção).

**Palavras-chave:** *Imagens Panorâmicas, Projeções Conformes*

## Referências

- [1] L. K. Sacht, “Content-Based Projections for Panoramic Images and Videos”, Dissertação de Mestrado, IMPA, 2010.  
URL: [http://w3.impa.br/~leo-ks/publications/thesis\\_leonardo\\_sacht\\_2010.pdf](http://w3.impa.br/~leo-ks/publications/thesis_leonardo_sacht_2010.pdf)