Transformações Conformes da Esfera para o Plano

Mateus Souza Oliveira[1] e Leonardo Koller Sacht[2]

Universidade Federal de Santa Catarina

Introdução

Imagens com grandes campos de visão (FOV), as ditas imagens panorâmicas, são uma maneira mais completa de representar o mundo. Com intuitos tanto práticos quanto artísticos, estas imagens apresentam distorções não naturais, as quais são o principal motivo de estudo do tema. Consideramos duas principais: linhas retas do mundo que aparecem curvadas (falta de curvatura nula) e objetos que apresentam distorções (falta de conformalidade). Como visto em nossas principais referências ([1] e [2]) não é possível termos uma imagem panorâmica perfeita, isto é, que tenha curvatura nula e conformalidade em todo ponto. Portanto, optamos por priorizar a conformalidade, por acreditarmos que ela terá mais aplicações.

Modelagem Matemática

Esquematizamos a seguir como associamos o domínio equirretangular à esfera usando a aplicação r.

$$r : [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{S}^2$$
$$(\lambda, \phi) \longmapsto (\cos(\lambda)\cdot\cos(\phi), \operatorname{sen}(\lambda)\cdot\cos(\phi), \operatorname{sen}(\phi)).$$

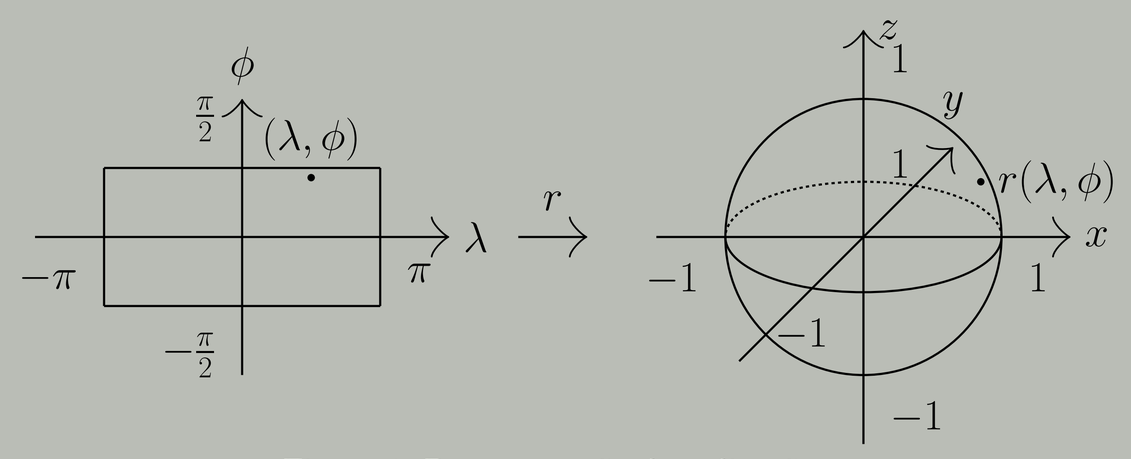

Figura 1: Representação da aplicação r.

Imagens com FOV esférico total são ditas equirretangulares.

Figura 2: Exemplo de imagem equirretangular. Imagem retirada de `https://www.flickr.com/photos/fabianosouza`.

Referências bibliográficas

[1] Denis N. Zorin.
Correction of geometric perceptual distortions in pictures, 1995.
URL: https://authors.library.caltech.edu/26887/3/95-22.pdf.

[2] Leonardo Koller Sacht.
Content-based projections for panoramic images and videos, 2010.
URL: http://w3.impa.br/~leo-ks/publications/thesis_leonardo_sacht_2010.pdf.

Projeções

Apresentamos as formas algébricas e exemplos de duas principais projeções:

- Perspectiva

$$P : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(\lambda, \phi) \longmapsto \left(\tan(\lambda), \frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda)}\right).$$

- Estereográfica

$$E : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(\lambda, \phi) \longmapsto \left(\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\lambda)\cdot\cos(\phi)}{\cos(\lambda)\cdot\cos(\phi)+1}, \frac{2\cdot\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\lambda)\cdot\cos(\phi)+1}\right).$$

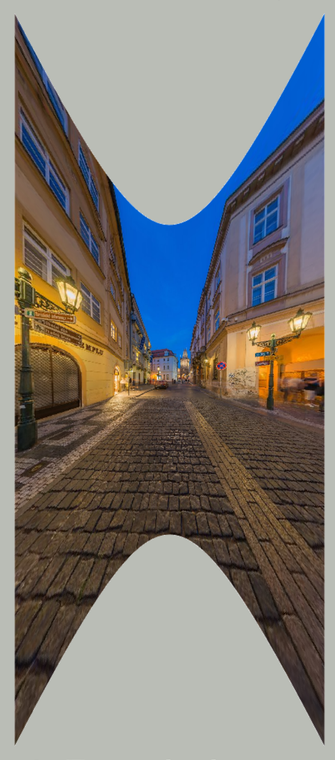

Figura 3: Exemplo de perspectiva.

Figura 4: Exemplo de estereográfica.

Conformalidade

Teorema. Sejam uma projeção $P : \Omega \subseteq \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $P(\lambda, \phi) = (u(\lambda, \phi), v(\lambda, \phi))$ e um ponto $p = (\lambda, \phi)$ no interior de Ω. A projeção P é conforme (a menos de reflexões) se, e somente se, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann na esfera:

$$\frac{\partial u}{\partial \phi}(p) = -\frac{1}{\cos(\phi)}\cdot\frac{\partial v}{\partial \lambda}(p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \phi}(p) = \frac{1}{\cos(\phi)}\cdot\frac{\partial u}{\partial \lambda}(p).$$

Resultados

Comparação de conformalidade com FOV fixado

Figura 5: Erro de conformalidade das projeções com FOV: $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$.

✉ E-mail: [1]matews1943@gmail.com, [2]leonardo.sacht@ufsc.br http://mtm.ufsc.br/~leo/