$k!$ divide $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

Lício hernanes Bezerra
Matemática/UFSC

Em geral, vemos pela primeira vez, em Análise Combinatória, a prova de que $k!$ divide $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, $1 \le k \le n$, ao escrever a fórmula das combinações

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Visto fora desse contexto, não é óbvio que $k!$, $1 \le k \le n$, sempre divide o produto $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. Então, um dia, na sala de aula, explicando o Princípio da Indução, resolvi provar por indução a proposição:

Proposição

Para todo número natural $n \ge 1$, $k!$ divide $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ para todo $1 \le k \le n$.

Prova (por indução em n):

Para $n = 1$, temos $k = 1$ e $1!$ divide 1.

Suponhamos que a proposição é verdadeira para algum $n \ge 1$. Vamos mostrar que a sua versão para $n + 1$ também é verdadeira. Bem, para $k = 1$ ou $k = n + 1$, a proposicão é claramente verdadeira. Considere, então, algum natural k tal que $2 \le k \le n$. Logo,

$$\mathbf{(n+1)}n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-k+1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)\,\mathbf{(n+1)} =$$
$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)\,\mathbf{[(n-k+1)+k]} =$$
$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)\,\mathbf{(n-k+1)} + \mathbf{k}n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2).$$

Note que pela hipótese de indução, a primeira parcela dessa expressão é um múltiplo de $k!$. Na segunda parcela, o produto $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)$ é igual a $n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)+1]$; logo, também pela hipótese de indução, é divisível por $(k-1)!$. Então $kn(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)$ é divisível por $k!$.

Portanto, $(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-k+1)$ é múltiplo de $k!$.

Curiosidade: Matrizes mágicas com produtos

São bem conhecidos quadrados mágicos envolvendo somas:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

As **somas** dos elementos de uma linha, de uma coluna ou de uma diagonal são todas iguais a **15** (RPMs 39, 41 e 48).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Escolhendo-se quaisquer quatro números de linhas e colunas distintas, as **somas** são todas iguais a 34. Exemplo: $5 + 10 + 15 + 4 = \mathbf{34}$. (RPM 59)

O quadrado é formado por elementos em PA. No caso ao lado, de razão 1.

Será que existem quadrados mágicos nos quais os **produtos** de elementos escolhidos são todos iguais? A resposta é **sim**, e os exemplos abaixo mostram como construí-los. O primeiro exemplo é baseado no primeiro quadrado acima e os outros dois no segundo quadrado acima. Como o leitor poderá observar, as construções se baseiam na igualdade $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Produtos $= 2^{\mathbf{15}}$

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

Produtos $= 5^4 \cdot 3^{\mathbf{34}}$

$5 \cdot 3^1$	$5 \cdot 3^2$	$5 \cdot 3^3$	$5 \cdot 3^4$
$5 \cdot 3^5$	$5 \cdot 3^6$	$5 \cdot 3^7$	$5 \cdot 3^8$
$5 \cdot 3^9$	$5 \cdot 3^{10}$	$5 \cdot 3^{11}$	$5 \cdot 3^{12}$
$5 \cdot 3^{13}$	$5 \cdot 3^{14}$	$5 \cdot 3^{15}$	$5 \cdot 3^{16}$

Produtos $= a^3 \cdot b^{27}$

ab^1	ab^3	ab^5
ab^7	ab^9	ab^{11}
ab^{13}	ab^{15}	ab^{17}

Enviado por *Rogério Cesar dos Santos.*