

Prova 1 - Álgebra Linear II-2013

Prof. Luciano Bedin

Nome:

2,5

1. Sejam u, v vetores não nulos de um espaço euclidiano V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considerando em V a norma $\|\cdot\|$ proveniente desse produto interno, mostre que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre u e v .

2,5

2. Considerando o produto interno usual, determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0 \text{ e } 2z - w = 0\}.$$

2,5

3. Considere o seguinte produto interno em $V = \mathbb{R}^3$:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3.$$

Seja $T : V \rightarrow V$ dada por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 - x_2, -x_3)$, encontre $W^\perp$ se $W = N(T)$ (núcleo da transformação T).

2,5

4. Seja V um espaço euclidiano. Se $u \in V$, $W = [u]$ e T é a transformação linear que associa a cada vetor de V sua projeção ortogonal sobre W , mostre que

$$\|v - Tv\| \leq \|v - w\|, \forall v \in V, \forall w \in W,$$

onde $\|\cdot\|$ é induzida pelo produto interno em V .

Resolução PI - Álgebra Linear II

$$1) \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

Por definição, $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$, logo

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \cos \theta \|u\| \|v\| + \|v\|^2$$

2) Se $(x, y, z, w) \in W$, temos

$$W = \{z \mid z = x+y\}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &= (x, y, z, 2z) = (x, y, x+y, 2x+2y) \\ &= x(1, 0, 1, 2) + y(0, 1, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Então } W = \left[(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 2) \right]$$

Para encontrarmos uma base ortonormal para W usamos o processo de Gram-Schmidt:

$$v_1 = u_1 = (1, 0, 1, 2)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (0, 1, 1, 2) - \frac{5 \cdot (1, 0, 1, 2)}{(\sqrt{6})^2}$$

$$v_2 = \left(-\frac{5}{6}, 1, 1 - \frac{5}{6}, 2 - \frac{10}{6} \right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

$$g_1 = \frac{(1, 0, 1, 2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$g_2 = \left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{36} + \frac{36}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36}}}$$

$$g_2 = \frac{6}{\sqrt{66}} \cdot \left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{5}{\sqrt{66}}, \frac{6}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{2}{\sqrt{66}} \right)$$

$\beta = \{g_1, g_2\}$ é base ortonormal de W , logo

$$P_W(u) = \sum_{i=1}^2 \langle g_i, u \rangle g_i$$

$$P_W(1, 1, 1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \cdot g_1 + \left(\frac{-5}{\sqrt{66}} + \frac{6}{\sqrt{66}} + \frac{1}{\sqrt{66}} - \frac{2}{\sqrt{66}} \right) g_2$$

$$P_W(1, 1, 1, -1) = 0$$

$$\textcircled{3} N(T) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$$

Logo, se $(x_1, x_2, x_3) \in N(T)$, temos $x_3 = 0$, $x_1 = x_2$

e $N(T) = [(1, 1, 0)]$. Se $(x, y, z) \in W^\perp$ deves,

tem $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0$, ou seja,

$2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$, portanto todo vetor

$u \in W^\perp$ é da forma $u = (x, -2x, z)$.

Por outro lado, se $u = (x, -2x, z)$ tem-se

$$\langle (x, -2x, z), (1, 1, 0) \rangle = 2 \cdot x \cdot 1 + (-2x) \cdot 1 = 0$$

Isso prova que $W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = -2x\}$,

ou seja, $W^\perp = [(1, -2, 0), (0, 0, 1)]$.

④ Sabemos que $v = v^\perp + Tv$, com $v^\perp \in W^\perp$.

Logo $v - Tv = v^\perp$ e dado qualquer $w \in W$,
temos

$$\langle v^\perp, Tv - w \rangle = 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|(Tv - w) - v^\perp\|^2 = \|v^\perp\|^2 + \|Tv - w\|^2$$

$$\|(Tv - w) - (Tv - v)\|^2 \geq \|v^\perp\|^2$$

$$\|v - w\|^2 \geq \|Tv - v\|^2, \text{ ou seja,}$$

$$\|v - w\| \geq \|Tv - v\|.$$