

Prova II- Introdução a Análise-Verão 2009

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual e (u_n) a seguinte sequência em M : para $\alpha > \beta > 0$, $u_1 = \alpha + \beta$ e $u_n = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{u_{n-1}}$, para todo natural $n \geq 2$. Mostre que $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Use este fato para encontrar o limite da sequência.
(Dica: use a fórmula $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \beta\alpha^{n-2} + \beta^2\alpha^{n-3} + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$).
2. Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual e a sequência (x_n) dada por: $a_1 = 4$, $a_n = 3(a_{n-1})^{1/2} + 4$, para $n \geq 2$. Mostre que a sequência é convergente e encontre seu limite.
3. Seja M um espaço métrico e $S \subset M$ denso em M . Dada (x_n) em M , suponha que exista $x \in M$ tal que $\lim d(x_n, s) = d(x, s)$, para todo $s \in S$. Prove que $\lim x_n = x$.
4. Seja M um espaço métrico completo e $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ uma família de subconjuntos não vazios, fechados e limitados de M com as seguintes propriedades: $E_n \supset E_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim(\text{diam} E_n) = 0$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ consiste de exatamente um ponto de M .
5. Seja M um espaço métrico e considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Mostre que se $a \in X'$ e $f : X \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que existe o limite de f quando x tende para a , existem números reais $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que se $x \in X \cap B(a; \delta)$, $x \neq a$, temos $|f(x)| \leq M$.
6. Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. Sejam $f, g : X \subset M \rightarrow M$ e defina

$$h : X \rightarrow M, h(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Seja $a \in X'$. Prove que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \max\{A, B\}.$$

Resolução Prova II - Introdução à Análise

① $u_1 = \alpha + \beta$, $\alpha > \beta > 0$

$$u_n = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{u_{n-1}}$$

Vamos mostrar por indução que $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$.

Para $n=1$, $u_1 = \alpha + \beta = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$.

Suponha que para algum $n \geq 1$, $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$. Então

$$u_{n+1} = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{u_n} = \alpha + \beta - \alpha\beta \cdot \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\alpha^{n+2} + \beta\alpha^{n+1} - \alpha\beta^{n+1} - \beta^{n+2} - \alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1})}{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})} \\ &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \end{aligned}$$

Agora, como $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$, temos

$$u_n = \frac{\alpha^n \cdot \alpha - \beta^n \cdot \beta}{\alpha^n - \beta^n} = \frac{\alpha^n \cdot \alpha - \alpha\beta^n + \alpha\beta^n - \beta \cdot \beta^n}{\alpha^n - \beta^n}$$

$$= \alpha + \frac{\beta^n(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)}$$

Usando a fórmula gerada temos

$$u_n = \alpha + \frac{\beta^n}{\alpha^{n-1} + \beta\alpha^{n-2} + \dots + \beta^{n-1}}$$

$$\text{Assim, } u_n = \alpha + \frac{\beta^n}{\beta^{n-1} \left[\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \frac{\alpha^{n-2}}{\beta^{n-2}} + \dots + 1 \right]}$$

$$u_n = \alpha + \frac{\beta}{\left[\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \frac{\alpha^{n-2}}{\beta^{n-2}} + \dots + 1 \right]} \leq \alpha + \frac{\beta}{\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1}$$

Logo $0 \leq u_n - \alpha \leq \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1}$

e como $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ implica em $\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} \rightarrow 0$, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$

tal que $\forall n \geq N$, $|u_n - \alpha| < \epsilon$, ou seja, $u_n \rightarrow \alpha$.

(2) $a_1 = 4$, $a_n = 3(a_{n-1})^{1/2} + 4$, $n \geq 2$

Vamos provar por indução que $4 \leq a_n \leq 16$. Para a_1 isso é verdade. Suponha que $4 \leq a_{n-1} \leq 16$. Então

$$4 < 3 \cdot 2 + 4 \leq a_n = 3(a_{n-1})^{1/2} + 4 < 3 \cdot (16)^{1/2} + 4 = 16$$

Vamos mostrar que $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, para $n=1$, temos

$$a_2 = 3(a_1)^{1/2} + 4 > 4 = a_1.$$

Suponha que para $N \in \mathbb{N}$, $a_k > a_{k-1}$, $\forall k \in \{2, \dots, N\}$

Então $a_{k+1} = 3(a_k)^{1/2} + 4 < 3(a_{k-1})^{1/2} + 4 = a_k$

Logo, a sequência (a_n) é monótona e limitada, portanto convergente. Seja $L = \lim a_n$. Então $4 \leq L \leq 16$ e, além disso,

$$L = 3\sqrt{L} + 4 \Rightarrow L - 4 = 3\sqrt{L} \Rightarrow 9L = (L - 4)^2 \Rightarrow L^2 - 8L + 16 = 9L \Rightarrow L^2 - 17L + 16 = 0$$

(3) Seja $S \subset M$ um conjunto denso em M . Então $\overline{S} = M$.
 Toda ponto $x \in M$ é ponto aderente de S . Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $\exists s_n \in S$ tal que $s_n \rightarrow x$.

Logo, dado $\epsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(s_n, x) < \epsilon/4$, $\forall n \geq N_1$.
 Como $d(x_n, s) \rightarrow d(x, s)$, $\forall s \in S$, em particular, $d(x_n, s_{N_1}) \rightarrow d(x, s_{N_1})$.
 Isso significa que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_2$, temos

$$|d(x_n, s_{N_1}) - d(x, s_{N_1})| < \epsilon/2 \Rightarrow d(x_n, s_{N_1}) < d(x, s_{N_1}) + \epsilon/2$$

Logo, se $n \geq N_2$, temos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, s_{N_1}) + d(s_{N_1}, x) < d(x, s_{N_1}) + \epsilon/2 + d(x, s_{N_1})$$

$$< 2 \cdot \epsilon/4 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Assim $x_n \rightarrow x$

(4) Vide Resolução na Xerox.

(5) Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Então, $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < d(x, a) < \delta$ e $x \in X$, temos

$$|f(x) - L| < 1$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$$

Logo, se $x \in B(a; \delta) \cap X$, $x \neq a$, temos

$$|f(x)| \leq 1 + |L| = M.$$

6) Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$.

Dados números reais u, v , temos

$$\max\{u, v\} = \frac{|u-v| + u+v}{2}$$

de fato, se $u=v$, $\max\{u, u\} = u = \frac{|u-u| + u+u}{2}$. Se $u > v$, $|u-v| = u-v$
e assim $\frac{|u-v| + u+v}{2} = \frac{u-v + u+v}{2} = u$; se $u < v$, $|u-v| = v-u$ e
temos

$$\frac{|u-v| + u+v}{2} = \frac{v-u + u+v}{2} = v$$

$$\text{Assim } h(x) = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2}$$

Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)| = |A - B|$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists b_1, b_2 > 0$

tais que se $x \in B(a; b_1) \cap (X - \{a\})$, $|f(x) - A| < \epsilon/2$ e se $x \in B(a; b_2) \cap (X - \{a\})$,
 $|g(x) - B| < \epsilon/2$.

Portanto se $\delta = \min\{b_1, b_2\}$ e $x \in B(a; \delta) \cap (X - \{a\})$
temos

$$\begin{aligned} \left| |f(x) - g(x)| - |A - B| \right| &\leq |f(x) - g(x) - (A - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \epsilon. \end{aligned}$$

Assim usando propriedades operacionais do limite temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= \left[\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - g(x)| + \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] / 2 \\ &= \frac{|A - B| + A + B}{2} = \max\{A, B\}. \end{aligned}$$