

Prova II- Introdução a Análise (Verão 2010)

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Sejam M e N espaços métricos. Para cada afirmação abaixo, prove ou dê um contra-exemplo:

a. Se $f : M \rightarrow N$ é contínua e X é denso em N , então $f^{-1}(X)$ é denso em M .

b. Se X é denso em M e $f : M \rightarrow N$ é contínua e sobrejetiva, então $f(X)$ é denso em N .

c. Se $f : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo, então f é uma aplicação aberta.

d. Se $X \subset M$, X não-vazio, então $\text{int}(X) = \text{int}(X')$.

2. Seja V um espaço vetorial real normado e considere $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual. Prove que se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ é linear, F é uniformemente contínua.

3. Sejam M, N espaços métricos. Mostre que $f : M \rightarrow N$ é contínua se, e só se, $\forall Y \subset N$, tem-se $f^{-1}(\text{int } Y) \subset \text{int } f^{-1}(Y)$.

4. Considere $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ com a métrica usual. Prove que se $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua e $a \in X'$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Mostre também que existe uma única aplicação uniformemente contínua

$$\bar{f} : \bar{X} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $\bar{f}|_X = f$.

5. Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. Verifique se cada sequência (x_n) abaixo é convergente ou divergente em M . Justifique rigorosamente sua resposta.

a. $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}$

b. $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, e para $n \in \{2, 3, \dots\}$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n + x_{n-1}^3)$

Resolução Prova II - Análise

1) a) Falso.

Contra-exemplo: $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$ com a métrica usual.
Então se $X = \mathbb{Q}$, $\bar{X} = \mathbb{R}$.

Tome $f: M \rightarrow N$, $f(x) = c$, $\forall x \in M$, onde $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Assim f é contínua.

Mas $f^{-1}(c) = \emptyset$ que não é denso em M .

b) Verdadeiro

Suponha $\bar{X} = M$, $f: M \rightarrow N$ contínua e sobrejetiva.

Vamos provar que $\overline{f(X)} = N$. Como $f(X) \subset N$,

basta provarmos que $N \subset \overline{f(X)}$. Tome $y \in N$,

como f é sobrejetiva, existe $x \in M$ com $f(x) = y$.

Mas $M = \bar{X}$, logo existe uma sequência (x_n) de X

tal que $x_n \rightarrow x$. Assim $(f(x_n))$ é uma sequência

em $f(X)$ a qual converge a $f(x) = y$,

pois f é contínua. Logo $y \in \overline{f(X)}$.

1 / 1
c) Verdadeiro.

Tomemos ACM , A aberto em M . Seja

$$g: N \rightarrow M$$

a inversa de f . Então g é contínua

e portanto $g^{-1}(A)$ é um aberto em N .

Mas $g^{-1}(A) = f(A)$. De fato, se $y \in f(A)$,

$y = f(x)$ para algum $x \in A$ e assim $x = g(y)$,

pela definição de função inversa. Logo $g(y) \in A$

e $y \in g^{-1}(A)$, ou seja, $f(A) \subset g^{-1}(A)$. Tomemos

$y \in g^{-1}(A)$, então $g(y) \in A$. Logo

$$f(g(y)) \in f(A)$$

Mas $f(g(y)) = y$ pela definição de função

inversa. Logo $y \in f(A)$ e $g^{-1}(A) \subset f(A)$.

Portanto $f(A)$ é aberto em N e f é

uma aplicação aberta.

1 1
d) Falso.

Tomemos $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual
e $X = \mathbb{Q}$. Então $X' = \mathbb{R}$. De fato,
 $X' \subset \mathbb{R}$ trivialmente. Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}$,
para todo $\varepsilon > 0$, a bola $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contém
algum racional diferente de x . Logo $\mathbb{R} \subset X'$.
Portanto $\text{int}(X') = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq \text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

2) Vide Caderno

3) Primeiro provemos que se $f: M \rightarrow N$
é contínua, $f^{-1}(\text{int } Y) \subset \text{int } f^{-1}(Y)$, $\forall Y \subset N$.
De fato, $\forall Y \subset N$, $\text{int } Y$ é aberto em N , logo
 $f^{-1}(\text{int } Y)$ é um aberto em M . Tome
 $x \in f^{-1}(\text{int } Y)$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que
 $B(x; \varepsilon) \subset f^{-1}(\text{int } Y) \subset f^{-1}(Y)$, já que
 $\text{int } Y \subset Y$. Assim, $x \in \text{int } f^{-1}(Y)$.

Suponha que $\forall Y \subset N, f^{-1}(\text{int } Y) \subset \text{int } f^{-1}(Y)$.

Tomemos $Y \subset N$ um aberto de N , então $\text{int } Y = Y$

e assim

$$f^{-1}(\text{int } Y) = f^{-1}(Y) \subset \text{int } f^{-1}(Y)$$

Como $\text{int } f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y)$, temos que $f^{-1}(Y) = \text{int } f^{-1}(Y)$

e $f^{-1}(Y)$ é aberto em M .

Assim f é contínua.

④ Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ unif. contínua. Provamos que

Se (x_n) é uma sequência de Cauchy

em X , $(f(x_n))$ é uma sequência de

Cauchy em $\mathbb{R}^m$. De fato, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$ tal que $x, y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Como (x_n) é de Cauchy em X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que $m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$

ou seja, $(f(x_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^m$.

1 / 1

Tome $a \in X'$. Então para todo (x_n) sequência de
 X convergindo para a temos que $(f(x_n))$ converge
 pois é de Cauchy em $\mathbb{R}^m$. Isso
 significa que existe $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, por um
 resultado demonstrado em aula.

Definimos
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ L & \text{se } x \in \bar{X}, x \notin X \end{cases}$$

Mostremos que $\bar{f}$ é uniformemente contínua.

Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

tal que $x, y \in X$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$.

Suponha que $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}$ são tais que $d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta/3$.

Existem seqüências $(x_n), (y_n)$ de X com

$x_n \rightarrow \bar{x}$ e $y_n \rightarrow \bar{y}$ e assim $f(x_n) \rightarrow \bar{f}(\bar{x})$

$f(y_n) \rightarrow \bar{f}(\bar{y})$. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que se $n > N$, $d(x_n, \bar{x}) < \delta/3$, $d(y_n, \bar{y}) < \delta/3$,

$d(f(x_n), \bar{f}(\bar{x})) < \varepsilon/3$, $d(f(y_n), \bar{f}(\bar{y})) < \varepsilon/3$.

1 / 1
 Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ e escolha $m \in \mathbb{N}$ com $m > 1/\delta$.

Então se $\bar{x}, \bar{y} \in X$ satisfizerem $d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$,
 temos

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(\bar{x}), \bar{f}(\bar{y})) &\leq d(\bar{f}(\bar{x}), f(x_m)) + d(f(x_m), f(y_m)) + \\ &\quad + d(f(y_m), \bar{f}(\bar{y})) \\ &< \varepsilon/3 + d(f(x_m), f(y_m)) + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } d(x_m, y_m) &\leq d(x_m, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, y_m) \\ &< \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta \end{aligned}$$

assim $d(f(x_m), f(y_m)) < \varepsilon/3$, o que

implica que $\bar{f}$ é uniformemente contínua.
 (para a unicidade de $\bar{f}$ ver última página)

(5) a) Se $m > n$, temos

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m+1)} + \dots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2m} \right| = \frac{1}{2(m+1)} + \dots + \frac{1}{2m}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m} \right]$$

1 1
 Mas $m+1 < m_1, m+2 < m_1, \dots, m-1 < m_1$, logo

$$|x_m - x_{m_1}| > \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m_1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 - m}{m_1}$$

Dado $N \in \mathbb{N}$ escolha $m, m_1 > N$ com

$$m > 2m_1, \text{ então } 2m - m_1 > 2m_1 \text{ e}$$

$$\text{assim } 2m - 2m_1 > m_1 \Rightarrow \frac{m - m_1}{m} > \frac{1}{2}.$$

Assim tome $\varepsilon = \frac{1}{4}$, para todo $N \in \mathbb{N}$

existem $m, m_1 > N$ com $|x_m - x_{m_1}| > \varepsilon$ e

(x_n) diverge pois não é de Cauchy.

b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} (1 + x_n + x_{n-1}^3), n \in \{2, 3, \dots\}.$$

Proveamos que $0 \leq x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ usando

o princípio da indução. O resultado é

verdadeiro para $n=1$ e $n=2$.

Admita que $0 \leq x_j < 1$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.
Então

$$x_{m+1} = \frac{1}{3}(1 + x_m + x_{m-1}^3) \text{ é tal que}$$

$$\frac{1}{3} \leq x_{m+1} < \frac{1}{3}(1 + 1 + 1^3) = 1.$$

Mostremos que (x_n) é crescente. De fato,

$$x_1 = 0 < \frac{1}{2} = x_2. \text{ Admita que } x_j < x_{j+1}$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Então

$$x_{m+1} = \frac{1}{3}(1 + x_m + x_{m-1}^3) > \frac{1}{3}(1 + x_{m-1} + x_{m-2}^3) = x_m.$$

A sequência (x_n) é então limitada

e monótona, sendo portanto convergente.

(*) $\bar{f} : \bar{X} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é única.

Seja $g : \bar{X} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $g(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, g uniformemente contínua.

Se $\bar{x} \in \bar{X}$, $\forall x_m \in X$, $x_m \rightarrow \bar{x}$, temos $f(x_m) \rightarrow \bar{f}(\bar{x})$
e $g(x_m) \rightarrow g(\bar{x})$. Mas $f(x_m) = g(x_m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

logo pela unicidade do limite temos $\bar{f}(\bar{x}) = g(\bar{x})$.