

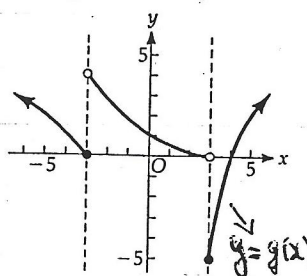
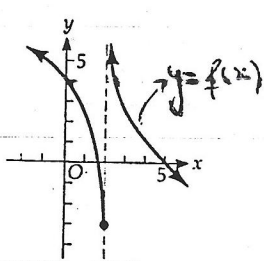
2007/01

Cálculo I- Prova 1

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Dados os gráficos abaixo encontre os limites indicados:



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -5^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

2. Calcule cada limite abaixo

a. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 + t} - \sqrt{t^2 + 4})$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

3. Suponha que $|f(x)| \leq g(x)e^{-x}$ para todo x e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$. Encontre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.4. a. Dê a definição precisa de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.b. Use a definição acima para provar que se $a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2}{\sqrt{a-x}} = +\infty$.5. Prove que se $c < 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = +\infty$.
Esse resultado é válido se $c = 0$? Justifique.

Pontuação:

1.) 1,4

2.) 3,0

3.) 0,6

4.) 2,5

5.) 2,5

Solução da Prova 1:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = -5, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} - 3}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} - 3)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{7 + \sqrt[3]{x} - 9}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{(x-8)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)}{(\sqrt[3]{x} - 2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3)} = \frac{1}{(4+4+4) \cdot (3+3)} = \frac{1}{72}$$

$$b) \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2+4}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2+t} - \sqrt{t^2+4}) \cdot \frac{(\sqrt{t^2+t} + \sqrt{t^2+4})}{(\sqrt{t^2+t} + \sqrt{t^2+4})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2+t - (t^2+4)}{\sqrt{t^2+t} + \sqrt{t^2+4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-4}{\sqrt{t^2+t} + \sqrt{t^2+4}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(1-4/t)}{t[\sqrt{1+1/t} + \sqrt{1+4/t^2}]} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1-4/t}{\sqrt{1+1/t} + \sqrt{1+4/t^2}}$$

$$= \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} (1-4/t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{1+1/t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{1+4/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} (1+1/t)} + \sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} (1+4/t^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+4/x^2)}}{x(1+\frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+4/x^2}}{x(1+\frac{4}{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+4/x^2}}{x(1+4/x)} = \frac{-\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+\frac{4}{x})} = \frac{-\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+\frac{4}{x^2})}}{1+0} = -1
 \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}, \quad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 3/2 \\ -(2x-3) & \text{se } x < 3/2 \end{cases}, \text{ logo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} \frac{2x^2-3x}{(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} \frac{x(2x-3)}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} x = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} \frac{2x^2-3x}{-(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} (-x) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} \text{ não existe}$$

b) como $|f(x)| \leq g(x)e^{-x}$ para todo x ,

$$-g(x)e^{-x} \leq f(x) \leq g(x)e^{-x}$$

$$\text{Note que } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = L \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -g(x)e^{-x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = -L \cdot 0 = 0$$

Pelo Teorema do confronto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4) a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se, dado $M > 0$, existir $\delta > 0$ tal que
 $f(x) > M$ sempre que $x_0 - \delta < x < x_0$

b) Temos de mostrar que, dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{x^2}{\sqrt{a-x}} > M \text{ sempre que } a-\delta < x < a$$

Suponha que $a > 0$. Escolha $\delta = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{a^4}{16M^2}\right)$ então se $a-\delta < x < a$

teremos $x > a-\delta > a-\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ e $x > a-\delta > a-\frac{a^4}{16M^2}$. Assim

$$x-a > -\frac{a^4}{16M^2} \Rightarrow a-x < \frac{a^4}{16M^2} \quad (*)$$

Como $\frac{a}{2} < x < a$, então $-a < -x < -\frac{a}{2}$ e $0 < a-x < \frac{a}{2}$. Dessa forma podemos extrair a raiz em (*) para obter $\sqrt{a-x} < \frac{a^2}{4M}$ ou $\frac{1}{\sqrt{a-x}} > \frac{4M}{a^2}$.

Logo $\frac{x^2}{\sqrt{a-x}} = x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a-x}} > x^2 \cdot \frac{4M}{a^2} > \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4M}{a^2} = M$ (usamos aqui o fato que $x > \frac{a}{2}$).

Suponha que $a < 0$. Escolha $\delta = \frac{a^4}{M^2}$. Então se $a-\delta < x < a$, temos $-a < -x < \delta - a \Rightarrow 0 < a-x < \delta = \frac{a^4}{M^2} \Rightarrow \sqrt{a-x} < \frac{a^2}{M} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a-x}} > \frac{M}{a^2}$.

Assim, como $x < a$ implica que $x^2 > a^2$, teremos

$$\frac{x^2}{\sqrt{a-x}} > a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a-x}} > a^2 \cdot \frac{M}{a^2} = M.$$

⑤ Temos de provar que dado $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x)g(x) > M$ sempre que $b < x < a$.

Do fato que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$, dado $\epsilon > 0$, a qual podemos escolher de forma

que $0 < \epsilon < -c$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - c| < \epsilon \text{ sempre que } a - \delta_1 < x < a.$$

Do fato que $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = +\infty$, dado $N < 0$, a qual podemos escolher

como sendo $N = \frac{M}{\epsilon + c} < 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$g(x) < N \text{ sempre que } a - \delta_2 < x < a.$$

Assim, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ temos $\epsilon - c < f(x) < \epsilon + c$ e $g(x) < \frac{M}{\epsilon + c}$

sempre que $a - \delta < x < a$.

$$\text{Logo } f(x) \cdot g(x) > (\epsilon + c) \cdot \frac{M}{(\epsilon + c)} = M \text{ sempre que } a - \delta < x < a.$$

resultado não é válido se $c = 0$. De fato, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \cdot x \right) = 1 \neq +\infty.$$