

Prova 1- Fundamentos de Cálculo - 2014/01

① Para todo $x \geq 0$, $x + \sqrt{x^2 + 2x} \geq x$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, então usando propriedades de limites, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \sqrt{x^2 + 2x}] = +\infty.$$

② Suponha que o elástico tenha comprimento inicial igual a $2L$ e esteja disposto ao longo do eixo x , ocupando o intervalo $[-L; L]$. Defina $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ a função que associa a cada $x \in [-L, L]$ sua nova posição ao esticarmos o elástico.

Como a ponta direita do elástico ($x=L$) é esticada para a direita, temos $f(L) > L$. Da mesma forma, a ponta esquerda ($x=-L$) é esticada para a esquerda, logo $f(-L) < -L$. Podemos admitir que f é contínua, logo $g: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$ é contínua e satisfaz

$$g(L) = f(L) - L > 0 \quad \text{e} \quad g(-L) = f(-L) - (-L) < 0.$$

Pelo teorema do valor intermediário,

existe $c \in]-L, L[$ tal que $g(c) = 0$,
ou seja, $f(c) = c$ o que prova o
resultado, haja vista a definição de f .

3) a) Verdadeiro. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right]$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

b) Falso. Contra-exemplo $\bar{c}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(vide resolução feita em aula)

c) Falso. Contra-exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (\text{contínua em } a=0)$$

$$g(x) = x+1 \quad (\text{contínua em } a=0)$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+1-1} = \frac{1}{x} \quad (\text{descontínua em } a=0)$$

d) Falso. Contra-exemplo:

$$x_m = \frac{1}{m}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = L = 0$$

$$y_m = m, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} y_m = +\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m \cdot y_m = 1$$

6) $V(t) = \frac{4\pi}{3} R(t)^3$,

V : volume da esfera
 R : raio da esfera

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi \cdot 3 \cdot R^2(t)}{3} \frac{dR}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} = K \cdot 4\pi R^2$$

$$\frac{dR}{dt} = K$$

7) Se $x^{1/2} + y^{1/2} = K^{1/2}$, então

$$\frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}} = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

para $x > 0, y > 0$.

Reta tangente à curva no ponto (x_0, y_0)
com $x_0 > 0$ e $y_0 > 1/2$ é dada por

$$y - y_0 = -\frac{y_0^{1/2}}{x_0^{1/2}} (x - x_0)$$

Intercepto x : $-y_0 = -\frac{y_0^{1/2}}{x_0^{1/2}} (x_1 - x_0)$

$$x_0^{\frac{1}{2}} y_0^{\frac{1}{2}} = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + x_0^{\frac{1}{2}} y_0^{\frac{1}{2}}$$

Intercepto y : $y - y_0 = -\frac{y_0^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}}} \cdot (-x_0)$

$$y_1 = y_0 + y_0^{\frac{1}{2}} x_0^{\frac{1}{2}}$$

$$y_1 + x_1 = x_0 + y_0 + 2 y_0^{\frac{1}{2}} x_0^{\frac{1}{2}} = (x_0^{\frac{1}{2}} + y_0^{\frac{1}{2}})^2 = (K^{\frac{1}{2}})^2 = K$$

- 4) O relógio adianta 300 segundos em 24 horas.
 O nº de oscilações do pêndulo em 24 horas é obtida através da regra de três:
- 1 volta $\rightarrow t$ segundos $\Rightarrow m = \frac{24 \times 3600}{t}$ voltas.
 n voltas $\rightarrow 24 \times 3600$ segundos

Então, sendo dt segundos o tempo que o relógio adianta em uma volta, temos

$$\frac{24 \times 3600 \text{ voltas}}{t} \rightarrow 3005$$

$$dt = \frac{300 t}{24 \times 3600}$$

$$1 \text{ volta} \leftarrow dt$$

$$dt = \frac{t}{288} \text{ segundo,}$$

Assim devemos aumentar o pêndulo em dl metros, (aproximadamente), sendo

$$8\pi l \cdot dl = 20t \cdot dt \Rightarrow dl = \frac{20t}{8\pi} \cdot \frac{t}{288} = \frac{5t^2}{576\pi} \text{ metros}$$

Mas $t = \frac{4\pi}{10}$, logo $dl = \frac{1}{288} \text{ metros}$

Seja $b = \sqrt{a^2 - 1}$, então

5

$$y' = \frac{1}{b} - \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x)}{(a+b+\cos(x))^2}} \cdot \frac{\cos(x)(a+b+\cos(x)) + \sin^2(x)}{(a+b+\cos(x))^2}$$

$$y' = \frac{1}{b} \left[1 - \frac{2 \cos(x) (a+b) + 1}{(a+b+\cos(x))^2 + \sin^2(x)} \right]$$

Como $(a+b+\cos(x))^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\cos(x) + \cos^2(x)$, temos

$$y' = \frac{1}{b} \left[\frac{(a+b)^2 + 2(a+b)\cos(x) + 1 - 2(a+b)\cos(x) - 1}{(a+b)^2 + 2(a+b)\cos(x) + 1} \right]$$

$$y' = \frac{1}{b} \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 1}{a^2 + 2ab + b^2 + 1 + 2(a+b)\cos(x)} \right]$$

$$y' = \frac{1}{b} \left[\frac{2b^2 + 2ab}{2a^2 + 2ab + 2(a+b)\cos(x)} \right]$$

$$y' = \frac{a+b}{a(a+b) + (a+b)\cos(x)} = \frac{1}{a + \cos(x)}$$

Prova 1-Fundamentos de Cálculo-2014/01

Prof. Luciano Bedin

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$.
2. Mostre, usando conceitos de cálculo, que se esticarmos um elástico movendo uma ponta para a direita e a outra para a esquerda, algum ponto do elástico continuará em sua posição original.
3. Prove ou dê um contra-exemplo:
 - a. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in \mathbb{R}$, então f é contínua em a .
 - b. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
 - c. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $a = 0$. Então $f \circ g$ é contínua em $a = 0$.
 - d. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ existe e é igual L e $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.
4. Se t segundos é o tempo de uma oscilação completa de um pêndulo simples de ℓ metros de comprimento, então sabe-se que $4\pi\ell^2 = 10t^2$. Um relógio com um pêndulo simples de $\ell = 1$ metro, adianta 5 minutos cada dia. *Usando o conceito de diferencial*, encontre o comprimento aproximado que se deve aumentar o pêndulo para se corrigir essa imprecisão.
5. Se
$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \left(\frac{\sin(x)}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos(x)} \right),$$
mostre que $y' = \frac{1}{a + \cos(x)}$.
6. Suponha que uma gota de neblina seja uma esfera perfeita, e que, por condensação, capte umidade a uma taxa proporcional à área de sua superfície. Mostre que nessas condições o raio da gota cresce a uma taxa constante.
7. Demonstre que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$ é constante e igual a k .