

Segunda Avaliação de Cálculo A (MTM 5161)

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Data:

1. Determine a derivada de cada função abaixo:

(a) (0,7 pontos) $f(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{x}$

(b) (0,8 pontos) $f(x) = \sqrt[3]{3x + \sqrt{1-x}}$

(c) (0,8 pontos) $g(x) = \text{tg}^3(x) \sec(x)$

(d) (0,7 pontos) $h(x) = e^{\cot g(-x)}$

(e) (1,0 pontos) $g(x) = \left(\ln \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \right)^3$

2. (2,0 pontos) Um funil na forma de um cone tem 10 cm de diâmetro no topo e 8 cm de profundidade. Um certo líquido está fluindo para dentro do funil a uma taxa de $12 \text{ cm}^3/\text{s}$ e para fora do funil a uma taxa de $4 \text{ cm}^3/\text{s}$. Com que velocidade a água estará subindo quando a profundidade for de 5 cm?

3. (1,0 pontos) Ache a equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto (2,-32).

4. (1,0 pontos) Use diferenciação logarítmica para calcular $f'(x)$ se $f(x) = x^{1/x}$.

5. (1,0 pontos) Dada $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-3/2}$.

6. (1,0 pontos) Dada $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 1 \\ 1 - |x| & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Ache a e b tais que $f'(1)$ exista.

Resolução da 2ª Prova : (cálculo A (m+n ≤ 16)) - Prof. Luciano Bedin

1) a) $f'(x) = \frac{[\ln(\pi x)]' \cdot x - x' \cdot \ln(\pi x)}{x^2} = \frac{\pi x \ln(\pi x) - \ln(\pi x)}{x^2}$

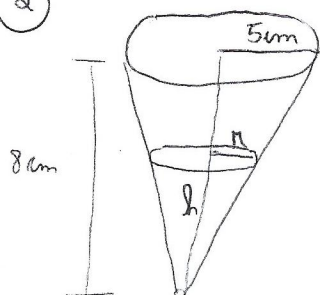
b) $f'(x) = \frac{1}{3} (3x + (1-x)^{1/2})^{-2/3} \cdot (3 + \frac{1}{2} (1-x)^{-1/2} \cdot (-1)) = \frac{1}{(3x + \sqrt{1-x})^{2/3}} \cdot \left(6 - \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \frac{(6\sqrt{1-x} - 1)}{\sqrt{1-x} (3x + \sqrt{1-x})^{2/3}}$

c) $f'(x) = 3 \tan^2 x \cdot (\tan x)' \cdot \sec x + \tan^3 x \cdot (\sec x)' = 3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \sec x + \tan^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x$
 $= 3 \tan^2 x \cdot \sec^3 x + \tan^4 x \cdot \sec x = \tan^2 x \sec x [3 \sec^2 x + \tan^2 x]$

d) $h'(x) = e^{\cot(-x)} \cdot (-\csc^2(-x)) \cdot (-1) = \csc^2(-x) \cdot e^{\cot(-x)}$

e) $g'(x) = 3 [\ln \sqrt{2x+1} - \ln \sqrt{1-x}]^2 \cdot [\ln \sqrt{2x+1} - \ln \sqrt{1-x}]'$
 $= 3 \left[\ln \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{1-x}} \right]^2 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(2x+1) \right]' - \left[\frac{1}{2} \ln(1-x) \right]' \right\} = 3 \left[\ln \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \right]^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{1-x} \right]$
 $= 3 \left[\ln \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \right]^2 \cdot \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2-2x} \right] = 3 \left[\ln \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \right]^2 \cdot \left[\frac{2-2x+2x+1}{(2x+1)(2-2x)} \right]$
 $= \frac{9}{2} \left[\ln \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \right]^2 \cdot \frac{1}{(2x+1)(1-x)}$

2



$$\frac{dv}{dt} = 12 \text{ cm}^3/\text{s} - 4 \text{ cm}^3/\text{s} = 8 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\frac{8}{h} = \frac{5}{r}$$

$$r = 5h/8$$

$$\frac{dh}{dt} = ? \text{ quando } h = 5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{5h}{8}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{64} = \frac{25\pi}{192} h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3 \times \frac{25\pi}{192} h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 8 = \frac{25\pi}{64} \cdot (5)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{512}{625\pi} \text{ cm/s}$$

$$3) (\sqrt[3]{xy})' = (14x)' + y' \Rightarrow \frac{1}{3} (xy)^{-2/3} [xy' + x'y] = 14 + y' \Rightarrow \frac{1}{3} (xy)^{-2/3} [xy' + y] = 14 + y'$$

Declividade $\Rightarrow m = y'$ quando $x = 2$ e $y = -32$, então

$$\frac{1}{3} (2 \cdot (-32))^{-2/3} [2 \cdot y' - 32] = 14 + y' \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (64)^{-2/3} [2y' - 32] = 14 + y'$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} (2y' - 32) = 14 + y' \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} (y' - 16) = 14 + y'$$

$$y' - 16 = 24(14 + y')$$

$$y' - 16 = 336 + 24y'$$

$$23y' = -16 - 336$$

$$m = y' = \frac{-352}{23}$$

Eq. da Reta Tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 32 = \frac{-352}{23}(x - 2)$$

$$23y + 736 = -352x + 704$$

$$23y + 352x + 32 = 0$$

4) $f(x) = x^{1/x}$

$|f(x)| = |x|^{1/x}$

$\ln|f(x)| = \frac{1}{x} \ln|x|$

$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{-1}{x^2} \ln|x| + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln|x|) = x^{\frac{1-2x}{2}} \cdot (1 - \ln|x|)$

5) $x^{1/2} + y^{1/2} = 2 \Rightarrow (x^{1/2})' + (y^{1/2})' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -x^{1/2} \cdot y^{1/2}$

ou seja, $y'' = (-x^{-1/2})' \cdot y^{1/2} + (y^{1/2})' \cdot (-x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-3/2} \cdot y^{1/2} + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot (-x^{1/2})$
 $= \frac{1}{2} x^{-3/2} (2 - x^{1/2}) + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot (-x^{1/2} y^{1/2}) (-x^{-1/2})$

$y' = \frac{1}{2} x^{-3/2} (2 - x^{1/2}) + \frac{1}{2} \cdot x^{-1} = x^{-3/2}$

6) P/ que $f'(1)$ exista f tem que ser contínua, e $f'_+(1) = f'_-(1)$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ e assim $\lim_{x \rightarrow 1^-} (a + b) = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$

Como $f'_+(1) = (1-x)' \Big|_{x=1} = -1$ e $f'_-(1) = 2ax \Big|_{x=1} = 2a$, devemos ter $2a = -1$

e $a = -1/2$, logo $b = +1/2$.

Resposta: $a = -1/2$ e $b = +1/2$.