

2006/02

Cálculo A- Prova 2

Nome:

1. O custo, em dólares, da produção de x unidades de um certo utensílio é

$$C(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3.$$

- a. (0,5 pontos) Encontre a função custo marginal (a função $C'(x)$).
- b. (1,0 pontos) Encontre $C'(100)$. Use o valor encontrado para estimar o custo do 101º item.
2. (2,0 pontos) Encontre a derivada de duas das funções abaixo
- a. $f(x) = \frac{\arcsin(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}$ c. $G(x) = x^x \sec\left(\frac{1}{x}\right)$
- b. $f(x) = (\ln(x))^{\cos(x)}$ d. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
3. (2,0 pontos) Encontre a equação da reta tangente à cardióide:

$$x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$$

no ponto $(0, 1/2)$.

4. (2,0 pontos) Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } x < 1, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Encontre os valores de a e b tais que $f'(1)$ exista.

5. (2,5 pontos) Resolva um dos seguintes problemas:

a. Despeja-se água num recipiente de forma cônica, à taxa de $8 \text{ cm}^3/\text{min}$. O cone tem 20 cm de profundidade e 10 cm de diâmetro em sua parte superior. Se existe um furo na base, e o nível da água está subindo à taxa de $1 \text{ mm}/\text{min}$, quando a água estiver a 16 cm do fundo, com que velocidade a água estará escoando?

b. Quando o último vagão de um trem passa sob uma ponte, um automóvel cruza a ponte sobre uma rodovia perpendicular à ferrovia e localizada 10 m acima do final da ponte. O trem e o automóvel viajam a velocidades constantes de 30 m/s e 20 m/s , respectivamente. Com que velocidade o automóvel e o trem estarão se separando depois de 2 s ?

$$\textcircled{1} \quad c(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3$$

$$a) \quad c'(x) = 2 - 0,04x + 0,00021x^2$$

$$b) \quad c'(100) = 2 - 0,04 \cdot 100 + 0,00021 \cdot (100)^2$$

$$c'(100) = 2 - 4 + 0,00021 \cdot 10^4 = 2 - 4 + 2,1 = 0,1$$

$$c(101) \approx c(100) + (101 - 100) \cdot c'(100) = c(100) + 0,1$$

$$c(101) \approx 920 + 2 \cdot 100 - 0,02 \cdot (100)^2 + 0,00007 \cdot (100)^3 + 0,1$$

$$c(101) \approx 920 + 200 - 0,02 \cdot 10^4 + 0,00007 \cdot 10^6 + 0,1$$

$$c(101) \approx 1120 - 200 + 70 + 0,1 = 990,10$$

O custo do 101º item é aproximadamente \$990,01.

$$\textcircled{2} \quad a) \quad f(x) = \frac{\arcsin(1-x^2)}{\sqrt{1-x}} = [\arcsin(1-x^2)] \cdot (1-x)^{-1/2}$$

$$f'(x) = [\arcsin(1-x^2)]' \cdot (1-x)^{-1/2} + [(1-x)^{-1/2}]' \cdot \arcsin(1-x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} \cdot (1-x^2)' \cdot (1-x)^{-1/2} + \left[-\frac{1}{2} (1-x)^{-3/2} \cdot (1-x)' \right] \arcsin(1-x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-1+2x^2-x^4}} \cdot (-2x) \cdot (1-x)^{-1/2} + \left[-\frac{1}{2} (1-x)^{-3/2} \cdot (-1) \right] \arcsin(1-x^2)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x} \sqrt{2x^2-x^4}} + \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} \arcsin(1-x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left[\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} + \frac{1}{2(1-x)} \arcsin(1-x^2) \right]$$

$$b) y = [\ln(x)]^{\cos(x)}$$

$$\ln y = \ln [\ln(x)]^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\ln(x))$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x)' \cdot \ln(\ln(x)) + (\cos x) [\ln(\ln(x))]'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (-\sin x) \cdot \ln(\ln(x)) + (\cos x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))'$$

$$y' = y \cdot \left[-(\sin x) \ln(\ln(x)) + \frac{(\cos x)}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \right]$$

$$y' = [\ln(x)]^{\cos x} \left[-(\sin x) \ln(\ln(x)) + \frac{\cos x}{x \ln(x)} \right]$$

$$c) y = x^x \sec\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\ln y = \ln [x^x \sec(1/x)] = \ln x^x + \ln(\sec(1/x))$$

$$\ln y = x \cdot \ln x + \ln(\sec(1/x))$$

$$\frac{1}{y} \cdot \ln \cdot y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + \frac{1}{\sec(1/x)} \cdot [\sec(1/x)]'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sec(1/x)} \cdot \sec(1/x) \cdot \tan(1/x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$y' = y \cdot \left[\ln x + 1 + \tan(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} \right]$$

$$y' = x^x \sec(1/x) \cdot \left[1 + \ln x - \frac{1}{x^2} \cdot \tan(1/x) \right]$$

$$d) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right]^{-1/2} \cdot \left[x + (x + \sqrt{x})^{1/2} \right]'$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-1/2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-1/2} (1 + (\sqrt{x})') \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-1/2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \right]^{-1} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-1/2} \cdot \frac{(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left[\frac{4\sqrt{x} + (x + \sqrt{x})^{-1/2} (1 + 2\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{8\sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[4\sqrt{x} + \frac{1 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \right] //$$

ou por diferenciação logarítmica:

$$\ln y = \ln \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left[1 + (\sqrt{x + \sqrt{x}})' \right]$$

$$y' = \frac{y}{2(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})} \left[1 + \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-1/2} \cdot (x + \sqrt{x})' \right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[\frac{4\sqrt{x} + (1 + 2\sqrt{x})(x + \sqrt{x})^{-1/2}}{4\sqrt{x}} \right] //$$

$$(3) \quad 2x + 2y \cdot y' = 2(2x^2 + 2y^2 - x) \cdot (2x^2 + 2y^2 - x)'$$

$$2x + 2y \cdot y' = 2(2x^2 + 2y^2 - x) \cdot (4x + 4y \cdot y' - 1)$$

Como $x=0$ e $y=1/2$, temos

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y' = 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y' - 1)$$

$$y' = 2y' - 1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow m = 1$$

Eq. da Reta Tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - \frac{1}{2} = x \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{2}}$$

(4) f deve ser contínua, logo $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

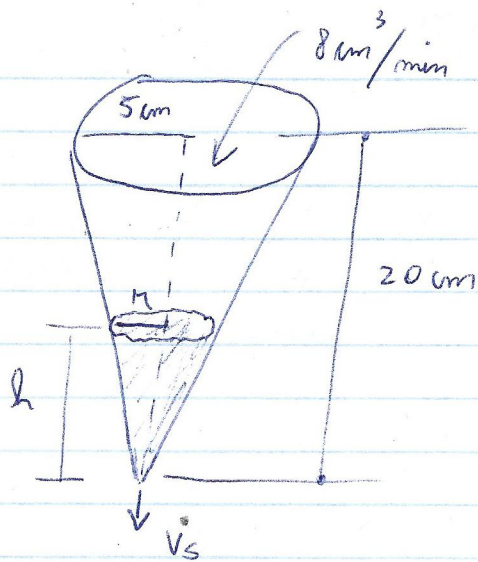
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{|x|} = a + b \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 2a \cdot 1 = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1/2}$$

$$-1/2 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 3/2}$$

Aqui usamos o fato de que p/ $x=1$,
 $|x| = x$ e $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$.

5 a)



$$\left. \begin{array}{l} r = r(t) \\ h = h(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cone formado pelo} \\ \text{líquido} \end{array}$$

$$\frac{dh}{dt} = 1 \text{ mm/min} = 0,1 \text{ cm/min}$$

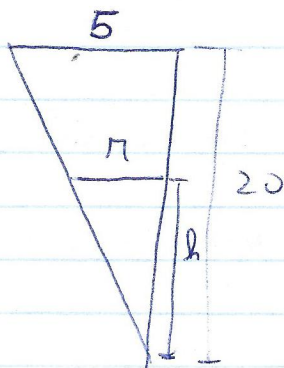
$V_s(t)$: Volume de água saindo

$V_e(t)$: " " " entrando

$$\frac{dV_e(t)}{dt} = 8 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = ?$$

$$V_e(t) - V_s(t) = \frac{\pi r^2(t) h(t)}{3}$$



$$\frac{5}{20} = \frac{r}{h} \Rightarrow \boxed{r = \frac{h}{4}}$$

$$V_e(t) - V_s(t) = \frac{\pi \left(\frac{h}{4}\right)^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{48}$$

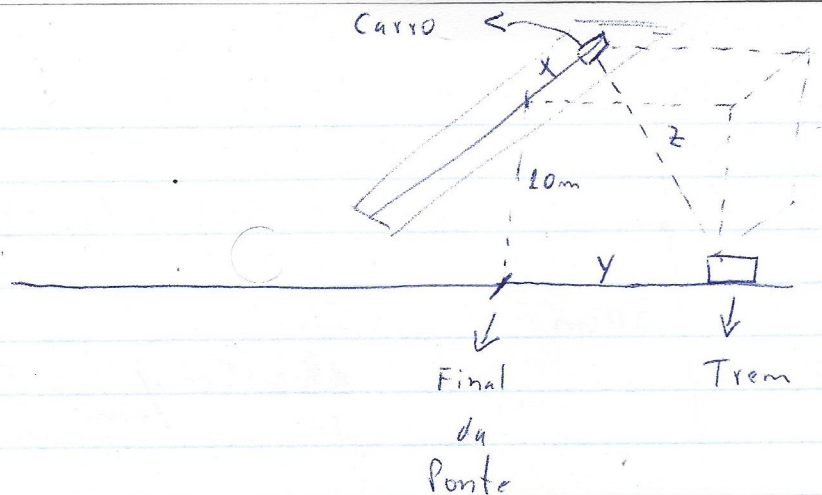
$$V_e'(t) - V_s'(t) = \frac{3\pi}{48} h^2 \cdot h' \Rightarrow$$

$$8 - V_s' = \frac{\pi}{16} \cdot (0,1) \cdot (16)^2$$

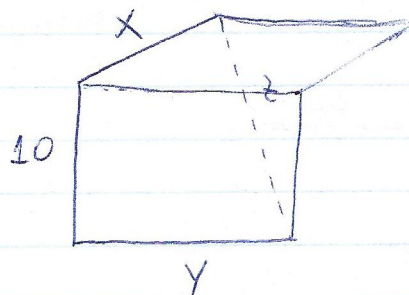
$$8 - V_s' = (0,1) \cdot \pi \cdot 16 = 1,6 \cdot \pi$$

$$V_s' = (8 - 1,6 \pi) \text{ cm}^3/\text{min}$$

⑤ b)



$$\begin{aligned}x'(t) &= 20 \text{ m/s} \\y'(t) &= 30 \text{ m/s} \\z'(t) &= ? \text{ p/ } t=2s\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x &= x(t), \quad z = z(t) \\y &= y(t)\end{aligned}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + 10^2$$

$$2z \cdot z'(t) = 2x \cdot x' + 2y \cdot y'$$

$$\text{Depois de } 2s \Rightarrow x(2) = 20 \cdot 2 = 40 \text{ m}$$

$$y(2) = 30 \cdot 2 = 60 \text{ m}$$

$$z^2(2) = (40)^2 + (60)^2 + 100$$

$$z^2(2) = 100 + 1600 + 3600$$

$$z^2(2) = 5300$$

$$z(2) = 10\sqrt{53} \text{ m}$$

$$\text{Logo, } 2 \cdot 10\sqrt{53} \cdot z' = 2 \cdot 40 \cdot 20 + 2 \cdot 60 \cdot 30$$

$$\cancel{20\sqrt{53}} \cdot z' = 2 \cdot 40 \cdot 20 + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 30$$

$$z' = \frac{80 + 180}{\sqrt{53}} = \frac{260}{\sqrt{53}} \text{ m/s} \approx 35,7 \text{ m/s}$$