

Cálculo A- Prova 2

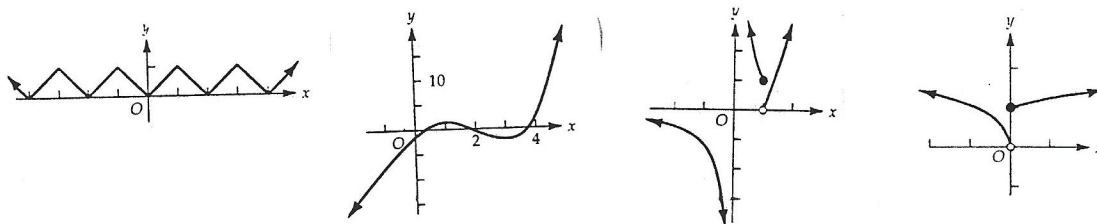
Nome:

1. Verifique se cada afirmativa abaixo é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira prove-a, se for falsa justifique (pode ser através de um exemplo).

- a. Toda função contínua em $x = x_0$ é diferenciável em $x = x_0$.
- b. Toda função diferenciável em $x = x_0$ é contínua em $x = x_0$.
- c. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo.
- d. Se f é uma função definida em todos os números reais e $f(0) = 1$, então $f'(0) = 0$.

d. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é diferenciável em $x = 0$.

2. Esboce o gráfico da derivada de cada função abaixo



3. Encontre os intervalos onde a função $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua. Justifique.

4. O custo total (em dólares) de saldar uma dívida a uma taxa de juros de $r\%$ ao ano é $C = f(r)$. Qual o significado de $f'(r)$? Interprete o fato de que $f'(10) = 1200$ e use-o para estimar $f(10,5)$.

5. Suponha que f é uma função que satisfaz a equação $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos os números reais x e y . Suponha também que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Encontre $f(0)$, $f'(0)$ e $f'(x)$.

6. Suponha que f é uma função com a propriedade $|f(x)| \leq x^2$ para todo x . Mostre que $f(0) = 0$. Então mostre que $f'(0) = 0$.

7. Encontre os pontos sobre a curva $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ na qual a reta tangente é horizontal.

Resolução da Prova 2:

1) a) Falsa, pois $f(x) = |x|$ é contínua em $x_0 = 0$, entretanto $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Assim, $f'(0)$ não existe.

b) Verdadeira. Basta: Como $f'(x_0)$ existe, temos $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Podemos escrever, para $x \neq x_0$, $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0)$. Passando ao limite

$$\text{essa expressão, temos } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0) \right].$$

Assim, usando propriedade dos limites,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Isso significa que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e a função é contínua em } x = x_0.$$

c) Basta verificar se a equação $x = x^3 + 1$ tem uma solução em $\mathbb{R}$.
Basta, se $x^3 - x + 1 = 0$ possui uma solução em $\mathbb{R}$.

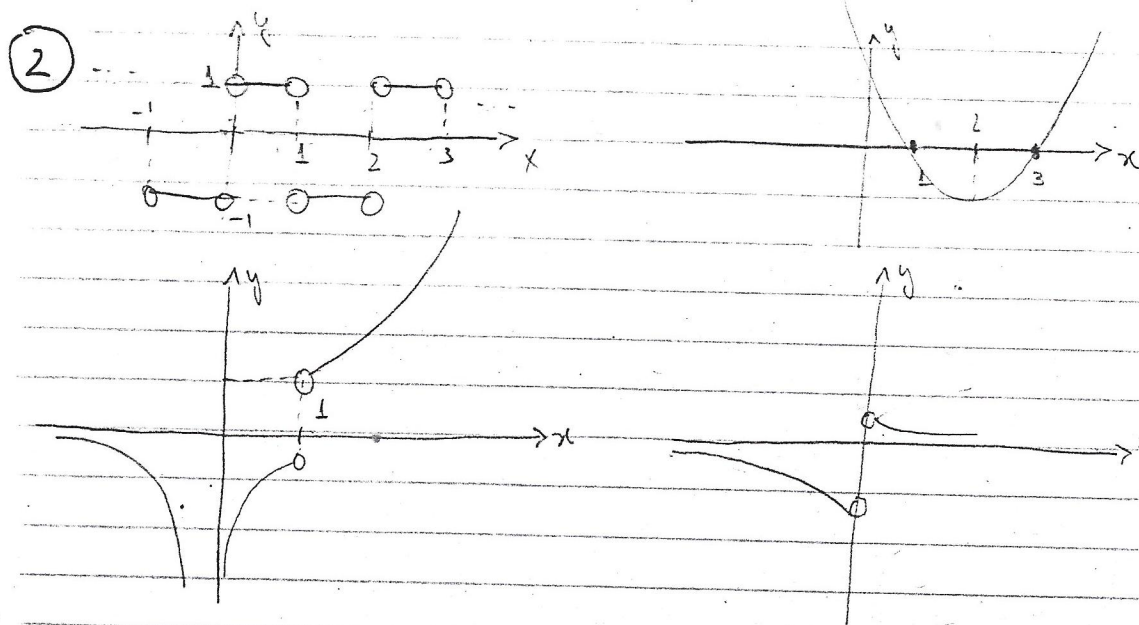
Para isso, seja $f(x) = x^3 - x + 1$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(-2) = -8 + 2 + 1 = -5$, $f(0) = 1$, podemos usar o teorema do valor intermediário para f , no intervalo $[-5, 1]$.

Assim, como $0 \in [-5, 1]$, existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é solução de $x = x^3 + 1$. A afirmação é verdadeira.

d) Falso. Seja $f(x) = x + 1$, então $f'(x) = 1$ e $f(0) = 1$.

d) Verdadeira. De fato, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x}) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x}) = 0$,

pois, como $-1 \leq \cos(\frac{1}{x}) \leq 1$, temos $-x \leq x \cos(\frac{1}{x}) \leq x$ se $x > 0$ e $x \leq x \cos(\frac{1}{x}) \leq -x$, se $x < 0$, podemos usar o teorema do confronto para concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x}) = 0$.



3) Se $x_0 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{-\frac{1}{|x_0|}} = f(x_0)$, f é contínua em x_0

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}}$

Fazendo a mudança de variáveis $y = -\frac{1}{|x|}$, temos que $y \rightarrow -\infty$ se $x \rightarrow 0$, logo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 = f(0)$, ou seja, f é contínua em $x_0 = 0$

Assim, f é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

4) $f'(r)$ corresponde à taxa de variação instantânea do custo em relação à taxa de juros.

O fato de que $f'(10) = 1200$ implica que quando a taxa de juros é 10%, o custo varia 1200 vezes mais do que a taxa. Assim, por exemplo, um aumento de 1% na taxa, implicaria num aumento aproximado de 1200 no custo.

Note que $f'(10) \approx \frac{f(x) - f(10)}{x - 10} \approx 1200$ para x próximo de 10. Assim,

$$f(x) \approx f(10) + 1200(x - 10) \quad \text{e} \quad f(10,5) \approx f(10) + 1200 \cdot 0,5$$

$$f(10,5) \approx f(10) + 600$$

Ou seja, o custo a uma taxa de 10,5% corresponde a um acréscimo de 600 dólares ao custo à taxa de 10%.

⑤ Note que $f(0+0) = f(0) + f(0) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 - f(x)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{f(y)}{y} + x^2 + xy \right] = 1 + x^2$$

⑥ $|f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \text{ como } |f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e t\~{a}o}$$

se $x > 0$, $-x \leq \frac{f(x)}{x} \leq x$ e se $x < 0$, $-x \leq \frac{f(x)}{x} \leq -x$. Pela desigualdade

do confronto, como $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, ou seja, $f'(0) = 0$.

⑦ $y' = \frac{-\cos x [2 + \cos x] - \cos x \cdot \cos x}{[2 + \cos x]^2} = \frac{-2\cos x - 1}{[2 + \cos x]^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

ou seja, $y' = 0$ nas pontos $(x, f(x)) = \left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou

$$(x, f(x)) = \left(-\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$