

2009/02

PROVA II
B-Cálculo I
Prof. Luciano Bedin

1. Prove, através da definição de limite, as igualdades abaixo:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{x^4 - 3}} = -1$

b. $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{|1 + 2x|}{4 + x} = +\infty$

2. Calcule os limites abaixo. Justifique as operações realizadas.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/3} + 1}{(x - 1)^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln x)$

3. Encontre todos os intervalos onde a função $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é contínua.

4. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua. Mostre que f tem um ponto fixo, isto é, existe um ponto $x \in [a, b]$ com $f(x) = x$.

5. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $I = [a, b]$, $a < b$. Mostre que $f(I) = [\alpha, \beta]$, onde $\alpha = \inf\{f(x), x \in I\}$ e $\beta = \sup\{f(x), x \in I\}$ (Teorema do Valor Extremo).

6. Sejam $I = [a, b]$, $a < b$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e crescente, mostre que a inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ é contínua.

Resolução Prova II:

(1) a) Dado $\varepsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ com $N > \sqrt[4]{\frac{36+3}{\varepsilon^2}}$

Então se $x < -N$ temos

$$x < -\sqrt[4]{\frac{36+3}{\varepsilon^2}} \Rightarrow x^4 > \frac{36+3}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow x^4 - 3 > \frac{36}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2 (x^4 - 3)}{4} > 9 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x^4 - 3}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-x^2}{\sqrt{x^4 - 3}} + 1 \right| = \left| \frac{(\sqrt{x^4 - 3} - x^2) \cdot (\sqrt{x^4 - 3} + x^2)}{\sqrt{x^4 - 3} (\sqrt{x^4 - 3} + x^2)} \right| = \frac{3}{\sqrt{x^4 - 3} (\sqrt{x^4 - 3} + x^2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Também } x < -N \Rightarrow x < -\sqrt[4]{\frac{4}{\varepsilon^2} + 3} \Rightarrow x^4 > \frac{4}{\varepsilon^2} + 3$$

$$\Rightarrow x^4 - 3 > \frac{4}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^4 - 3}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto

$$x < -N \Rightarrow \left| \frac{-x^2}{\sqrt{x^4 - 3}} + 1 \right| \leq \left| \frac{-x^2}{\sqrt{x^4 - 3}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{x^4 - 3}} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Dado $A > 0$ escolha $\delta = \frac{7}{A+2}$. Então se

$$-4 < x < -4 + \frac{7}{A+2} \quad \text{temos} \quad 0 < x+4 < \frac{7}{A+2}$$

$$\text{e } 0 < A(x+4) + 2(x+4) < 7 \Rightarrow 0 < A(x+4) < -1 - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{-1-2x}{x+4} > A \Rightarrow \frac{|1+2x|}{x+4} > A$$

$$\text{Note que } -4 < x < -4 + \frac{7}{A+2} \Rightarrow -8 < 2x < -8 + \frac{14}{A+2} \Rightarrow -7 < 2x+1 < -7 + \frac{14}{A+2} = -\frac{7A}{A+2}$$

$$\text{Logo } |2x+1| = -2x-1$$

$$2) \quad a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/3} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/3} - 1)^2}{(x-1)^2} = (*)$$

Mas $x-1 = (x^{1/3} - 1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)$, logo

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)^2 \cdot (x-1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin(3x)}$$

Calculamos os limites separadamente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(3x)} = 2 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{2x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cdot \cos y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1 \cdot 1 = 1$$

(*) pode ser justificado como segue:

$$h(x) = \frac{\arctan(2x)}{2x} = g(f(x)) \quad \text{onde}$$

$$g: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{é definida por } g(y) = \begin{cases} \frac{y}{\tan y} & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

e $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é dada por

$$f(x) = \arctg(2x).$$

É tão $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg(2x) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1 = g(0)$, logo pela

Teorema sobre o limite da composição de funções temos que (*) é verdadeira. Logo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{2x} = \frac{2}{3}$

④ Sejam $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua. Defina $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - x.$$

Então g é contínua em $[a, b]$. Note que

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ pois $\forall m, f \in [a, b]$, análogamente.

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Assim $g(b) \leq 0 \leq g(a)$, aplicando o Teorema do Valor Intermediário para g , $\exists c \in [a, b]$ com $g(c) = 0$. Logo

$$0 = g(c) = f(c) - c \Rightarrow f(c) = c.$$

⑤ e ⑥ Vide Caderno.

c) Usando a fórmula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ com

$$a = x \quad e \quad b = \sqrt[3]{1-x^3} \quad e \quad \lim$$

$$x^3 + 1 - x^3 = \left(x + \sqrt[3]{1-x^3} \right) \left(x^2 - x(1-x^3)^{1/3} + (1-x^3)^{2/3} \right)$$

$$e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - x(1-x^3)^{1/3} + (1-x^3)^{2/3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{1 - \frac{1}{x} (1-x^3)^{1/3} + \frac{1}{x^2} (1-x^3)^{2/3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{1 - \left(\frac{1-x^3}{x^3} \right)^{1/3} + \left(\frac{1-x^3}{x^3} \right)^{2/3}} = \frac{0}{1+1-1} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e = 1$$

(*) pode ser justificada como segue:

$$h(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = g(f(x)) \quad \text{onde} \quad g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(y) = \ln y \quad e \quad f(x): (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \text{onde} \quad \text{por}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad \text{Note que } \text{Im } f \subset (0, +\infty) = \text{Dom}(g) \\ \text{com } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad e \quad \lim_{y \rightarrow e} \ln y = 1 = g(e), (*) \text{ \u00e9 verdadeira}$$

usando o Teorema do limite da composição de funções.

⑤ Seja $h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ então

h é uma função racional portanto se $a \in \text{Dom}(h)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{1-x^2} = h(a)$$

Por outro lado $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \begin{cases} e^y & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a)) = h(a), \quad \forall a \in \text{Dom}(h)$$

Isso significa que $\lim_{x \rightarrow a} e^{\frac{1}{1-x^2}} = e^{\frac{1}{1-a^2}} = f(a)$ sempre que $a \notin \{-1, 1\}$

Por outro lado $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = -\infty$ pois

$1-x < 0$ quando $x > 1$. Além disso $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, então

usando o Teorema do limite da composição de funções temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x^2}} = 0 = h(1) \quad \text{e } h \text{ é contínua pela direita em } a=1.$$

Mas $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)(1+x)} = +\infty$ pois $1-x > 0$ quando $x < 1$.

Como $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$, analogamente ao argumento acima

temos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-x^2}} = +\infty$ e h não é contínua à esquerda

em $a=1$. Logo os intervalos onde f é contínua não são todos aqueles e não incluem ± 1 . além dos intervalos da forma $[1, a]$, $(1, a)$ e $[1, +\infty)$