

Prova 2-Fundamentos de Cálculo-2014/01

Prof. Luciano Bedin

1. Admita que f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Mostre que se

$$[f(b)]^2 - [f(a)]^2 = b^2 - a^2,$$

então a equação $f'(x)f(x) = x$ tem pelo menos uma raiz em $]a, b[$.

2. Escreva (**mas não calcule!**) uma integral definida que representa o volume do sólido V indicado:

a. V é obtido pela rotação da região delimitada pela curva $f(x) = \sin(x)$ e pelas retas $x = \pi/4$, $y = 0$ e $x = \pi$ em torno da reta $x = 2\pi$.

b. V tem como base o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e suas seções transversais ao eixo x são triângulos equiláteros.

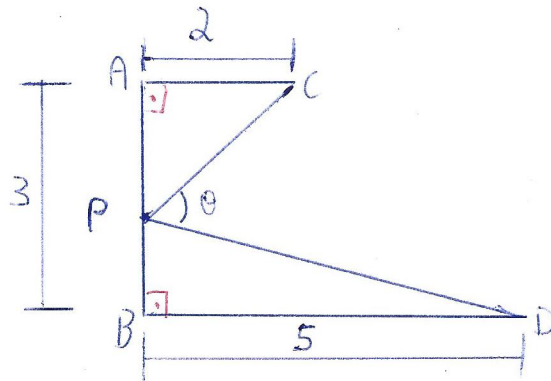
3. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a. $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

b. $\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}} dx$

4. Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{5/3} - 2x^{2/3}$, determine: os extremos relativos de f ; intervalos onde f é crescente; intervalos onde f é decrescente; pontos de inflexão de f ; intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima; intervalos onde o gráfico de f é côncavo para baixo; as assíntotas verticais, horizontais ou oblíquas de f . Usando essas informações esboce o gráfico de f .

5. Em que posição deveria ser o ponto P escolhido sobre o segmento de reta AB abaixo para que o ângulo θ seja máximo?



Resolução:

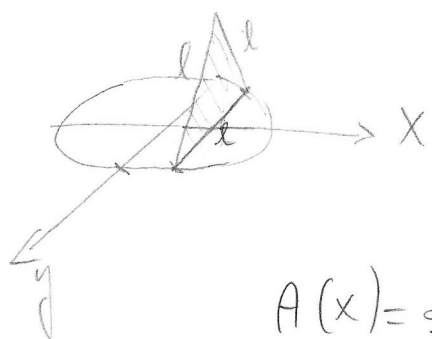
① Seja $g(x) = f^2(x) - x^2$. Então g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Pela hipótese, $g(a) = g(b)$, então usando o Teorema de Rolle, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$g'(c) = 2f(c) \cdot f'(c) - 2c = 0 \Rightarrow f(c) \cdot f'(c) = c.$$

② a) V é igual ao volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pela curva $g(x) = \sin(x)$ pelas retas $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$, $y = 0$ e $x = \pi - 2\pi = -\pi$ em torno do eixo y . Portanto:

$$V = 2\pi \int_{-\frac{7\pi}{4}}^{-\pi} x \cdot \sin(x) dx$$

b)

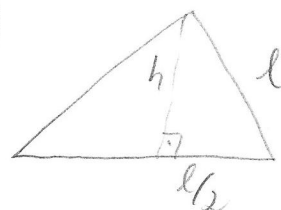


$$l = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$A(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2}$$

$$A(x) = \sqrt{3}(1-x^2)$$

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = \sqrt{3} \cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$



$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$(3) a) \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \quad (2)$$

$$1-x+2x^2-x^3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E) \cdot x$$

$$x=0 \Rightarrow \boxed{1=A}$$

$$1-x+2x^2-x^3 = x^4+2x^2+1 + Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx + Dx^2+Ex$$

$$B+1=0 \Rightarrow \boxed{B=-1} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{C=-1} \\ 2+B+D=2 \\ 2-1+D=2 \Rightarrow \boxed{D=1} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} C+E=-1 \\ -1+E=-1 \\ \boxed{E=0} \end{array} \right.$$

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} + C$$

$$b) \begin{aligned} 3+4x-4x^2 &= 4 \left[\frac{3}{4} + x - x^2 \right] = -4 \left[x^2 - x - \frac{3}{4} \right] = -4 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right] \\ &= -4 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right] = 4 \left[1 - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Seja $u = x - \frac{1}{2}$, então $du = dx$ e

$$\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{(u+\frac{1}{2})^2}{4[1-u^2]^{3/2}} du$$

Agora faz-se $u = \sin(t)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, então $du = \cos(t) dt$

$$\text{e } (1-u^2)^{3/4} = (\cos^2(t))^{3/2} = \cos^3(t), \quad (u+\frac{1}{2})^2 = \left(\sin(t) + \frac{1}{2} \right)^2 = \sin^2(t) + \sin(t) + \frac{1}{4}$$

Portanto

3

$$\int \frac{(u + \frac{1}{2})^2 du}{4[1 - u^2]^{3/2}} = \frac{1}{4} \int \frac{(\sin^2(t) + \sin(t) + \frac{1}{4}) \cos(t) dt}{\cos^3(t)}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2(t)}{\cos^3(t)} dt + \frac{1}{4} \int \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt + \frac{1}{16} \int \frac{1}{\cos^3(t)} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \tan^2(t) dt + \frac{1}{4} \int \sec(t) \cdot \tan(t) dt + \frac{1}{16} \int \sec^3(t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int (-1 + \sec^2(t)) dt + \frac{1}{4} \sec(t) + \frac{1}{16} \tan(t) + C$$

$$= -\frac{1}{4} t + \frac{1}{4} \tan(t) + \frac{1}{4} \sec(t) + \frac{1}{16} \tan(t) + C = -\frac{1}{4} t + \frac{1}{4} \sec(t) + \frac{5}{16} \tan(t) + C$$

Temos $u = \sin(t)$, $\cos(t) = \sqrt{1 - u^2}$ e $\tan(t) = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$.

Também, $\sec(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ e $t = \arcsin(u)$.

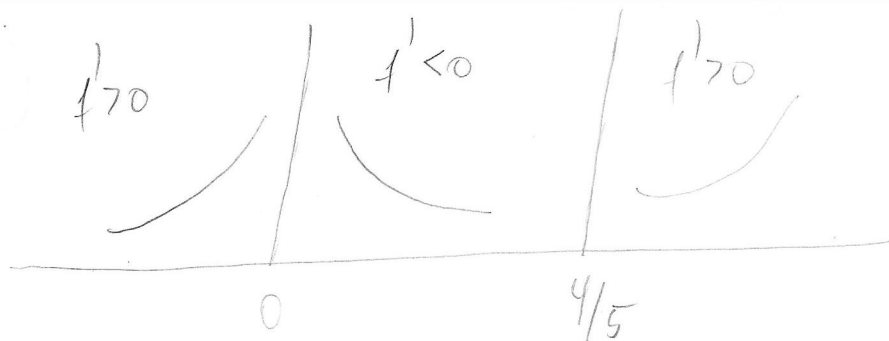
Lembrando que $u = x - \frac{1}{2}$, temos

$$\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{4} \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x - \frac{1}{2})^2}} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (x - \frac{1}{2})^2}} + C$$

4) $f(x) = x^{5/3} - 2x^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} - \frac{4}{3} x^{-1/3} = \frac{1}{3} x^{-1/3} [5x - 4]$$

Pontos críticos de f : $x = 0$ e $x = \frac{4}{5}$



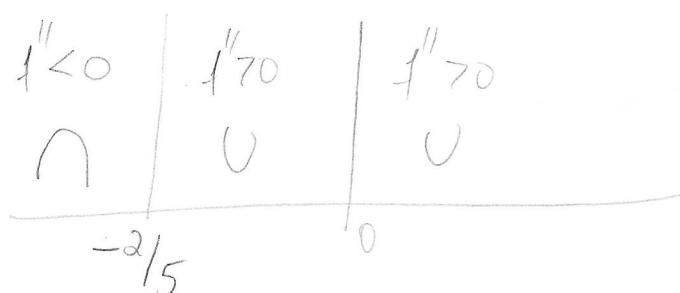
(4)

Em $x=0$, f tem um máximo relativo; em $x=4/5$, f tem um mínimo relativo.

Em $]-\infty, 0[\cup]4/5, +\infty[$, f é crescente.

Em $]0, 4/5[$, f é decrescente.

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{4}{9}x^{-4/3} = \frac{1}{9}x^{-4/3} [10x + 4]$$



f tem um ponto de inflexão em $x=-2/5$, sendo côncava para baixo em $]-\infty, -2/5[$ e côncava para cima em $]-2/5, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{5/3} - 2x^{2/3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/3} \left(1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

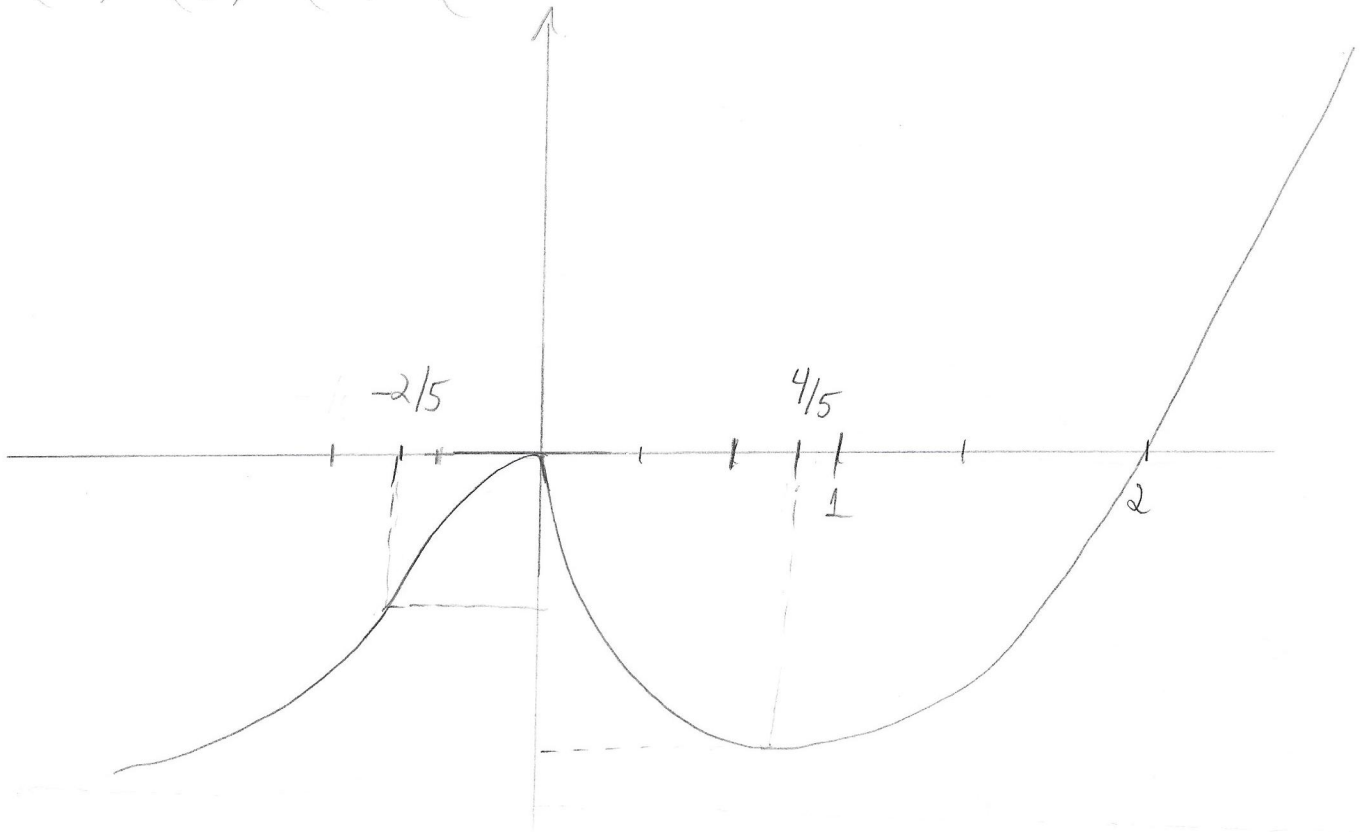
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^{5/3} - 2x^{2/3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{5/3} \left(1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

Não há
assíntotas
verticais,
horizontais
ou oblíquas.

$$f(0)=0, \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{5/3} - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2/3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/3} \left[\frac{4}{5} - 2 \right] = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/3} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) < 0$$

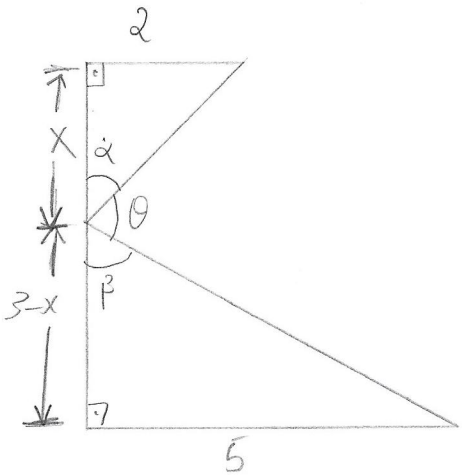
$$f\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{5/3} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{2/3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2/3} \left[-\frac{2}{5} - 2 \right] = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2/3} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) < 0$$

(5)



$$x^{5/3} - 2x^{2/3} = 0 \Rightarrow x^{2/3} [x - 2] = 0 \Rightarrow x = 2$$

(5)



$$\tan \alpha = \frac{2}{x}, \quad \tan \beta = \frac{5}{3-x}, \quad 0 < x < 3$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{x}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{5}{3-x}\right)$$

$$\theta = \pi - \alpha - \beta$$

$$\theta(x) = \pi - \arctan\left(\frac{2}{x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{3-x}\right), \quad 0 < x < 3$$

Note for $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \theta(x) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\theta(x) = - \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} - \frac{\left(\frac{5}{3-x}\right)^2}{1 + \left(\frac{5}{3-x}\right)^2}$$

(6)

$$\theta'(x) = - \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}} - \frac{\left(\frac{-5}{(3-x)^2}\right) \cdot (-1)}{1 + \frac{25}{(3-x)^2}}$$

$$\theta'(x) = \frac{2}{x^2+4} - \frac{5}{(3-x)^2+25} = 0 \Leftrightarrow 2(3-x)^2 + 50 = 5x^2 + 20$$

$$\theta'(x) = \frac{-3(x^2+4x-16)}{(x^2+4)[25+(3-x)^2]}$$

$$2(9-6x+x^2) = 5x^2 - 30$$

$$18 - 12x + 2x^2 = 5x^2 - 30$$

$$3x^2 + 12x - 48 = 0$$

$$x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \frac{-4 + \sqrt{80}}{2} \text{ ou} \\ x = \frac{-4 - \sqrt{80}}{2} \end{array} \right)$$

$$0 < x < x^* = -2 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \theta' > 0$$

$$x^* < x < 3 \Rightarrow \theta' < 0$$

Logo em $x^* = -2 + 2\sqrt{5}$, θ tem

Um ponto de máximo local,

obviamente devemos ter

$$\theta(x^*) > \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{2}{3}\right) > \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{5}{3}\right), \text{ caso contrário}$$

haveria outro ponto crítico de θ em $]0, 3[$.

Portanto, θ assume seu valor máximo em $x^* = -2 + 2\sqrt{5}$, esse valor é

$$\theta^* = \pi - \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right) - \arctg\left(\frac{5}{5-2\sqrt{5}}\right)$$