

Prova 2-Cálculo 1

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Resolva todas as questões abaixo apresentando os detalhes da resolução.
Questões sem justificativa ou cálculos não serão consideradas.

4,5

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 5x})$.

2. Determine a derivada das seguintes funções:

4,5

a. $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(-x + (3x^2 - 1)^7)$

4,5

b. $f(t) = \sqrt{\frac{1 - \cos(3t)}{4t + \sin(7t)}}$

2,0

3. Determine a reta tangente à curva $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$ no ponto $(0, -2)$.

2,0

4. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede a 12 metros de distância. Um homem de 2 metros de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s. Quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando o homem está a 4 metros dela?

5. O período T de oscilação de um pêndulo de comprimento x é dado por

4,5

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}},$$

sendo g a aceleração devido à gravidade. Sabe-se que o comprimento do pêndulo foi medido com erro relativo de 3%. Usando o conceito de diferencial, estime o erro relativo no cálculo do período T do pêndulo.

Gabarito - P2 - (1º/2º 1 - 2022.1)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x} &= (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x}) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x})}{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2+3x})^2 - (\sqrt{x^2+5x})^2}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x}} = \frac{(x^2+3x) - (x^2+5x)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x}} \\
 &= \frac{-2x}{\sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{3}{x})} + \sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{5}{x})}} = \frac{-2x}{x \left[\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right]} = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} \\
 &\quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\
 &\quad |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \quad \quad |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad x \quad \quad \quad x \quad (\text{pois } x > 0, \text{ uma vez que } x \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Logo: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} \right) = \frac{-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1, \\
 \text{pois } \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{5}{x} \rightarrow 0 \text{ com } x \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

$$2) a) f'(x) = (e^{2x})' \cdot \ln[-x + (3x^2-1)^7] + e^{2x} \cdot \left\{ \ln[-x + (3x^2-1)^7] \right\}'$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln[-x + (3x^2-1)^7] + e^{2x} \cdot \frac{[-x + (3x^2-1)^7]'}{[-x + (3x^2-1)^7]}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \ln[-x + (3x^2-1)^7] + \frac{e^{2x} \cdot [-x + (3x^2-1)^7]'}{[-x + (3x^2-1)^7]}$$

$$f'(x) = e^{2x} \left\{ 2 \ln[-x + (3x^2-1)^7] + \frac{[-1 + 7 \cdot (3x^2-1)^6 \cdot 6x]}{[-x + (3x^2-1)^7]} \right\}$$

$$f'(x) = e^{2x} \left\{ 2 \ln[-x + (3x^2-1)^7] + \frac{[-1 + 42x(3x^2-1)^6]}{[-x + (3x^2-1)^7]} \right\}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(3t)}{4t + \sin(7t)} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1 - \cos(3t)}{4t + \sin(7t)} \right)'$$

$$\left(\frac{1 - \cos(3t)}{4t + \sin(7t)} \right)' = \frac{(1 - \cos(3t))' \cdot (4t + \sin(7t)) - (1 - \cos(3t)) \cdot (4t + \sin(7t))'}{(4t + \sin(7t))^2}$$

$$= \frac{3\sin(3t) \cdot (4t + \sin(7t)) - (1 - \cos(3t)) \cdot (4 + 7\cos(7t))}{(4t + \sin(7t))^2}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \cos(3t)}{4t + \sin(7t)} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{3\sin(3t) \cdot (4t + \sin(7t)) - (1 - \cos(3t)) \cdot (4 + 7\cos(7t))}{(4t + \sin(7t))^2} \right)$$

$$③ y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$$

$$\hookrightarrow y^4 - 4y^2 = x^4 - 5x^2 \Rightarrow 4y^3 y' - 8y y' = 4x^3 - 10x$$

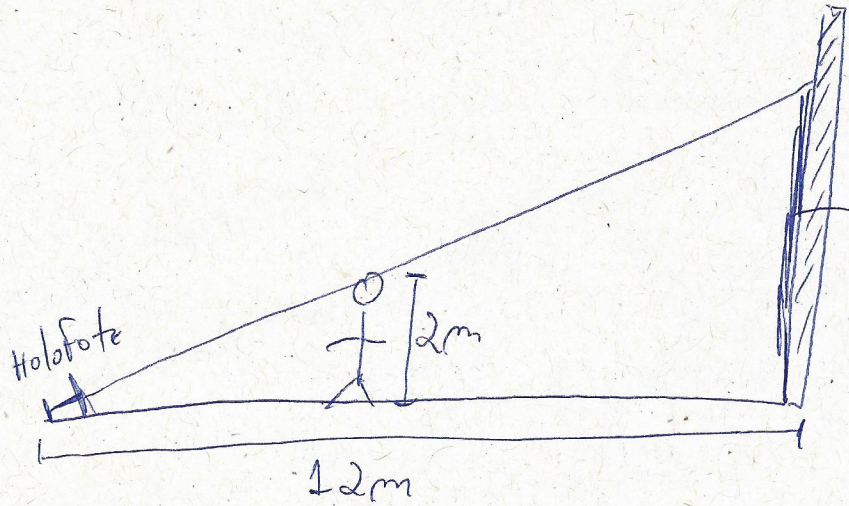
$$(4y^3 - 8y) y' = 4x^3 - 10x \Rightarrow y' = \frac{4x^3 - 10x}{4y^3 - 8y}$$

Para $x=0$ e $y=-2$ temos $m = y'(0) = \frac{4 \cdot 0^3 - 10 \cdot 0}{4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2)} = 0$.

Equação da reta tangente é:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

(4)



Velocidade do homem
= 1,6 m/s

→ sombra

$$\frac{dx}{dt} = 1,6$$

$$\frac{y}{2} = \frac{12}{x} \Rightarrow y = \frac{24}{x}$$

y: comprimento da sombra

$$y = 24x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -24x^{-2} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -24 \cdot x^{-2} \cdot 1,6$$

$$x = 8$$

(pois a gestão pede, quando o homem está a 4 metros da parede, qual a velocidade com que a sombra diminui)

$$\frac{dy}{dt} = -24 \cdot 8^{-2} \cdot 1,6$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{24}{64} \cdot \frac{16}{10} = -\frac{3}{5} = -0,6 \text{ m/s}$$

R.: A sombra diminui a uma taxa de 0,6 metros por segundo

(3)

5) $\frac{dx}{x} = \pm \frac{3}{100}$ (erro relativo de 3% na medida do comprimento)

$dT = T'(x) dx \Rightarrow$ Erro estimado no cálculo do período do pêndulo.

$T(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$T'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$dT = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi\sqrt{x}}{\sqrt{g}}} dx$

$\frac{dT}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi\sqrt{x}}{\sqrt{g}}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{+3}{100} = \pm \frac{1,5}{100}$

Ou seja, o erro relativo correspondente estimado no cálculo do período é $\frac{dT}{T} = \pm \frac{1,5}{100}$, que é 1,5%.