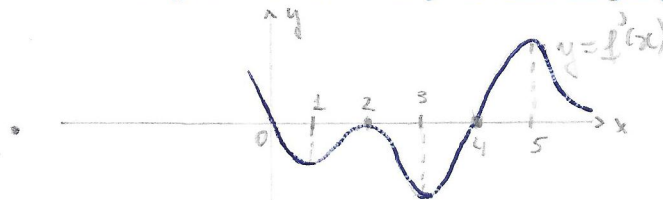


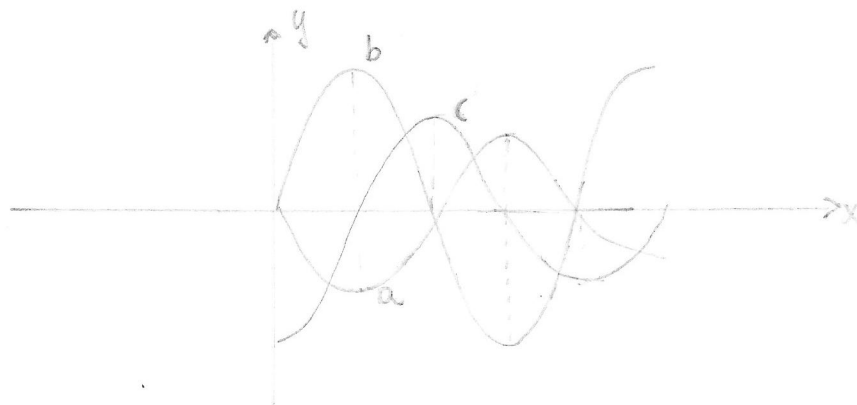
Cálculo A- Prova 3

Nome:

1. A figura abaixo mostra o gráfico da derivada f' de uma função f .



- (a) (0,3 pontos) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
- (b) (0,3 pontos) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
- (c) (0,8 pontos) Esboce o gráfico de f'' .
- (d) (1,0 pontos) Esboce um possível gráfico de f .
2. (1,8 pontos) Calcule **dois** dos seguintes limites
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\arctan(4x)}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+5} \right)^x$ (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{1/x}$
3. (1,5 pontos) Um contêiner na forma de um paralelepípedo retângulo sem tampa deve ter um volume de $10m^3$. O comprimento da base é o dobro da largura. O material para fabricar a base custa \$10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.
4. Calcule as seguintes integrais
- (a) (0,4 pontos) $\int \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$ (b) (0,6 pontos) $\int \sqrt{x} \sin(1+x^{3/2}) dx$
- (c) (0,6 pontos) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ (d) (1,0 pontos) $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x) dx$
- (e) (1,0 pontos) $\int e^{2x} \cos x dx$
5. (0,7 pontos) A figura a seguir mostra os gráficos de f , f' e $\int_0^x f(t)dt$. Identifique cada gráfico.



Prova 3 - Cálculo A:

- ① a) f é crescente onde $f'(x) > 0$, ou seja, nos intervalos $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$
 f é decrescente nos demais intervalos, ou seja, em $[0, 4]$

- b) Valores críticos de f : $x=0$, $x=2$, $x=4$

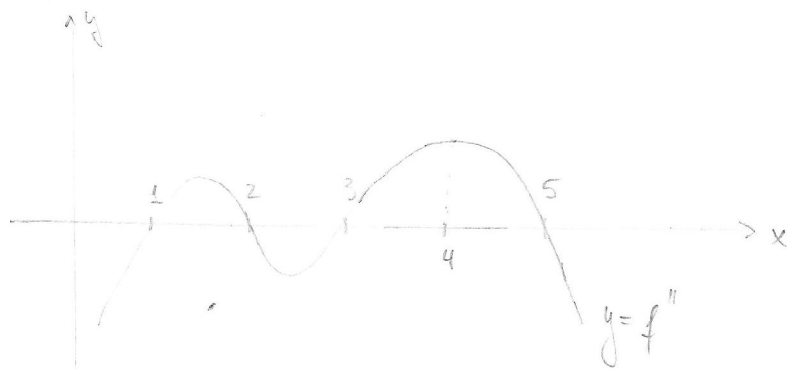
Fazendo o teste da derivada primeira:

$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
0	2	4	

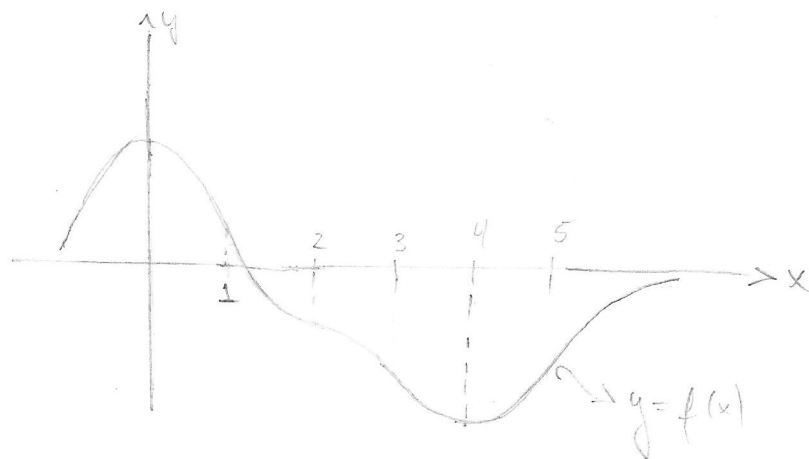
Em $x=0$, f tem um máximo relativo.

Em $x=4$, f tem um mínimo relativo.

c)



d)



$$(2) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\arctan(4x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{4}{1+16x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+16x^2}{4} = \frac{1}{4}$$

L.H.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sec x) \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sec x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cos x} \stackrel{\frac{-\infty}{1}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\sec x \cdot \cot x)}$$

L.H.

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x \cdot \frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\cos x}{x} \right) \cdot \left(\frac{\sec x}{\cos x} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\cos x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= -1 \cdot 0 = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+5} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(\frac{x}{2x+5} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \ln \left(\frac{x}{2x+5} \right)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left(\frac{x}{2x+5} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(\frac{x}{2x+5} \right)}{\frac{1}{x}} \right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{x}{2x+5} \right)} \cdot \left(\frac{x}{2x+5} \right)'}{\frac{-1}{x^2}}}$$

L.H.

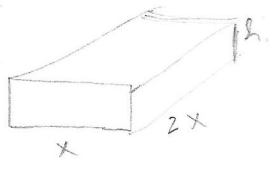
$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{x} \right) \cdot (-x^2) \cdot \left[\frac{2x+5 - 2x}{(2x+5)^2} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x+5} \cdot 5} = e^{-\frac{5}{2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x) \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + x} \cdot (e^x + 1) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = e$$

L.H.

3



$$V = 2x^2 h = 10$$

$V \rightarrow$ Volume, $C \rightarrow$ custo

$$C = 2x^2 \cdot 10 + 6 \cdot (2x \cdot h) \cdot 2 + 6 \cdot x \cdot h \cdot 2$$

$$C(x) = 20x^2 + 36x \cdot \frac{10}{2x^2} = 20x^2 + \frac{180}{x}, \quad x > 0$$

$$C'(x) = 40x - \frac{180}{x^2} = 0 \Rightarrow 40x = \frac{180}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, $C(x) \rightarrow +\infty$, e $x \rightarrow +\infty$, $C(x) \rightarrow +\infty$, logo em $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$, $C(x)$

tem um mínimo absoluto em $(0, +\infty)$

 alculo do custo mínimo: $C(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}) = 10 \cdot (\sqrt[3]{\frac{9}{2}})^2 + \frac{180}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}} = \frac{10 \cdot (\sqrt[3]{\frac{9}{2}})^3 + 180}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$

$$= \frac{225}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$$

4) a) $\int \frac{x}{(x^2+1)^4} dx = \int x(x^2+1)^{-4} dx = \int u^{-4} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{(x^2+1)^{-3}}{-6} + C$

$u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx$

b) $\int \sqrt{x} \ln(1+x^{3/2}) dx = \int \ln u \cdot \frac{2}{3} du = \frac{2}{3} \int \ln u du = -\frac{2}{3} \ln u + C$

$$= -\frac{2}{3} \ln(1+x^{3/2}) + C$$

$u = 1+x^{3/2}$

$du = \frac{3}{2} x^{1/2} dx$

$$c) \int_e^4 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \int_e^4 \frac{(\ln x)^{-1/2}}{x} dx = \int_1^4 u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_1^4 = 2\sqrt{4} - 2 = 2$$

$$u = \ln x \quad x=e \Rightarrow u=1$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad x=e^4 \Rightarrow u=4$$

$$d) \int_1^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-x}{1+x^2} dx = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

$$du = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{-dx}{1+x^2}$$

$$w = 1+x^2$$

$$dw = 2x dx$$

$$\Rightarrow \text{Se } x=1, w=2$$

$$\text{Se } x=\sqrt{3}, w=3+1=4$$

$$= \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(1) + \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{dw}{w}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(4) - \ln(2)] //$$

$$e) \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x - 2 \int \sin x e^{2x} dx = e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x dx$$

$$u = e^{2x} \quad dv = \cos x dx$$

$$\Downarrow$$

$$u = e^{2x} \quad dv = \cos x dx$$

$$du = 2e^{2x} dx \quad v = \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$du = 2e^{2x} dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C$$

5) graficamente vê-se que $b' = c$ e que $c' = a$

$$\text{Logo } b = \int_0^x f(t) dt, \quad c = f(x) \text{ e } a = f'(x)$$