

Prova I - Cálculo 2 - 2019/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1,5

1. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato corresponde à superfície obtida pela rotação da curva $y = ax^2$ em torno do eixo y . Se a antena tiver 6 metros de diâmetro e profundidade de 1 metro, encontre o valor de a e a superfície da mesma.

2. Considere $\mathcal{R}$ a região delimitada pelas curvas $x = y + 1$ e $x = -y^2 + 6y - 3$.

1,5

- a. Escreva uma integral para o cálculo do volume do sólido obtido ao rotacionarmos a região $\mathcal{R}$ em torno do eixo y .

1,5

- b. Escreva uma integral para o cálculo do volume do sólido obtido ao rotacionarmos a região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = -2$.

Obs.: Não é necessário calcular as integrais.

3. Considere a função $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$.

0,5

- a. Determine e esboce seu domínio.

0,5

- b. Explique como são suas curvas de nível e esboce seu mapa de contornos.

0,5

- c. Esboce o gráfico de f .

4. Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe:

1,0

- a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

1,0

- b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

5. Determine as derivadas parciais indicadas.

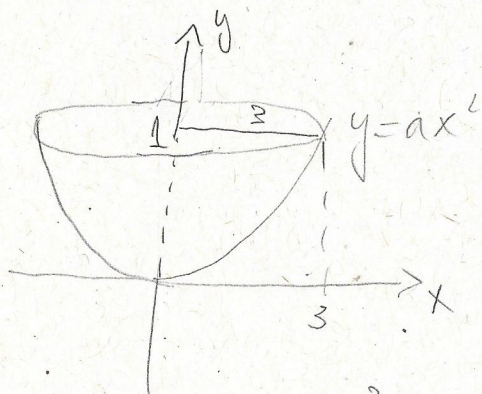
1,0

- a. $f(x, y, z) = x \ln(xy^2z^3)$, f_{xy} .

1,0

- b. $w = \frac{x}{y + 2z}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$

①



$$x=3 \Rightarrow y=1$$

$$1 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$y = \frac{1}{9}x^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{9}x$$

$$A = 2\pi \int x ds = 2\pi \int_0^3 x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 x \sqrt{1 + \frac{4}{81}x^2} dx$$

$$u = 1 + \frac{4}{81}x^2 \Rightarrow du = \frac{8}{81}x dx \Rightarrow A = 2\pi \cdot \frac{81}{8} \cdot \int_0^3 \frac{8}{81} x \sqrt{1 + \frac{4}{81}x^2} dx$$

$$A = \frac{81\pi}{4} \left(1 + \frac{4}{81}x^2\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^3 = \frac{27\pi}{2} \left[\left(1 + \frac{4 \cdot 9}{81}\right)^{3/2} - 1^{3/2} \right]$$

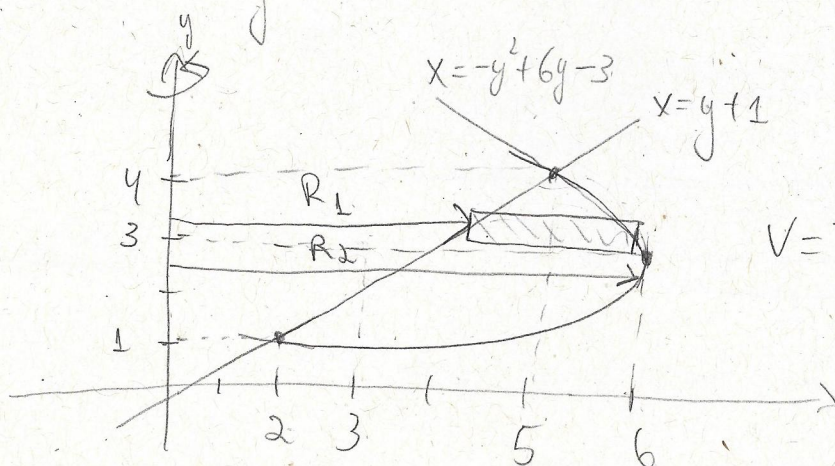
$$A = \frac{27\pi}{2} \left[\left(\frac{13}{9}\right)^{3/2} - 1 \right]$$

$$\textcircled{2} \quad x = y+1, \quad x = -y^2 + 6y - 3$$

Intersetção entre as curvas: $y+1 = -y^2 + 6y - 3$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=4 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

a)

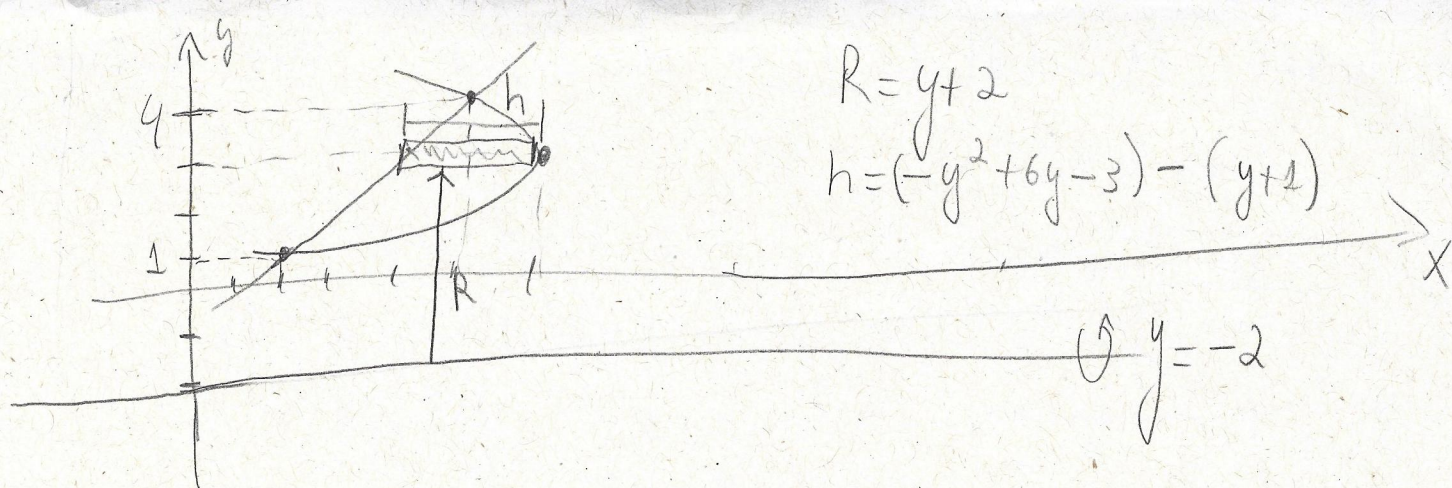


$$R_2 = -y^2 + 6y - 3$$

$$R_1 = y + 1$$

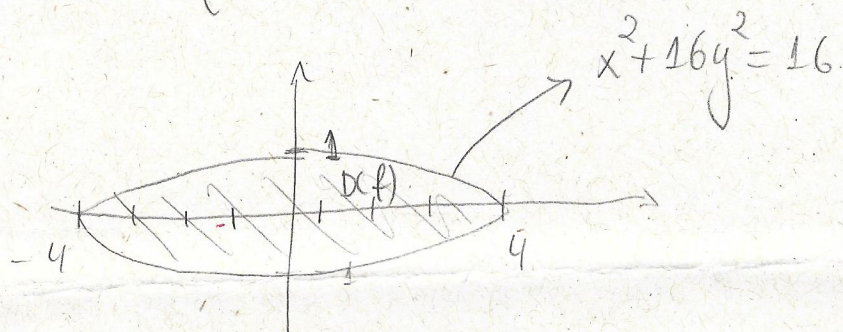
$$V = \pi \int_1^4 [(-y^2 + 6y - 3)^2 - (y + 1)^2] dy$$

b)



$$V = 2\pi \int_1^4 (y+2) \cdot [(-y^2 + 6y - 3) - (y+1)] dy$$

3) a) $D(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 16y^2 \leq 16 \}$

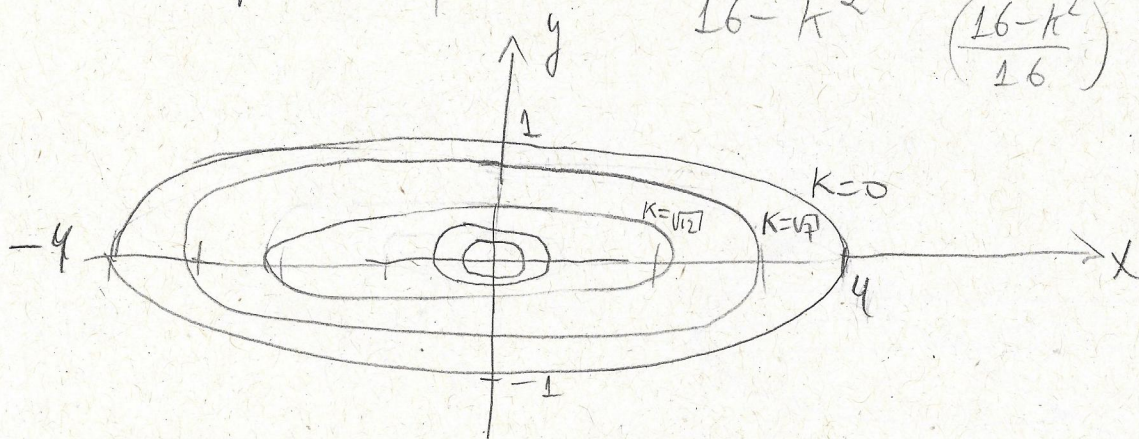


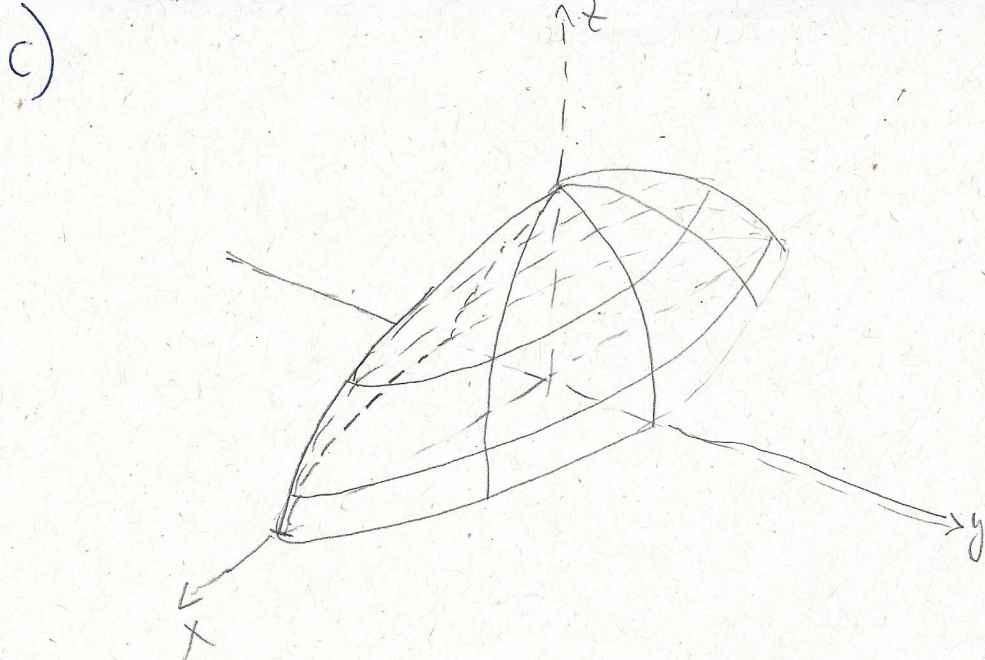
b)

$$K = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2} \Rightarrow 16 - x^2 - 16y^2 = K^2 \Rightarrow x^2 + 16y^2 = 16 - K^2 \quad (K^2 \leq 16)$$

As curvas de nível são elipses com centro em $(0,0)$

dadas pela equação $\frac{x^2}{16 - K^2} + \frac{y^2}{\frac{(16 - K^2)}{16}} = 1$





④ a) Sendo $x=0$ temos $f(0,y)=0$. Sendo $x=y^4$ e $y \rightarrow 0$,
 temos $f(y^4,y) = \frac{y^4 \cdot y^4}{(y^4)^2 + y^8} = \frac{y^8}{2y^8} = \frac{1}{2}$. Logo o limite não existe.

b) Usando coordenadas polares, temos $r^2 = x^2 + y^2$ e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-r^2} - 1}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-r^2} \cdot (-2r)}{2r}$$

L'Hopital.

$$= \lim_{r \rightarrow 0} (-e^{-r^2}) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{e^{r^2}} = -1$$

$$5) a) f_x = x \cdot \frac{1}{xy^2z^3} \cdot y^2z^3 + \ln(xy^2z^3) = 1 + \ln(xy^2z^3)$$

$$f_{xy} = \frac{1}{xy^2z^3} \cdot x \cdot 2y \cdot z^3 = \frac{2}{y}$$

$$b) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y+2z} = (y+2z)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [(y+2z)^{-1}] = -(y+2z)^{-2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} [-(y+2z)^{-2}] = 2(y+2z)^{-3} \cdot 2 = \frac{4}{(y+2z)^3}$$