

Prova II - Cálculo 2 - 2019/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

(2,5)

1. Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ no conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

(1,5)

2. A energia cinética de uma partícula é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, sendo m sua massa e v sua velocidade, respectivamente. O erro máximo na medida de m é de 1% e na medida de v é de 3%. Usando o conceito de diferencial, estime o erro máximo na medida de K .

(2,5)

3. Seja $u = f(r)$ e $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Mostre que

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r).$$

4. Encontre uma família de soluções a um parâmetro na forma implícita para a EDO

(1,5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$$

e também suas soluções constantes.

(2,0)

5. O isótopo radioativo de chumbo, $Pb - 209$, decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia-vida é de 3,3 horas. Se 1 grama de chumbo está presente inicialmente, quanto tempo levará para 90% do chumbo desaparecer?

Resolução PII - (álculo 2 - 2019/02)

① Pontos críticos: $f_x = 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow y = y^9$
 $f_y = 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = y^3 \Rightarrow y = y^9$

Logo temos $y=0$, $y=1$ ou $y=-1$. Os pontos críticos são então dados por $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

O ponto $(-1,-1)$ está descartado pois não pertence à região. Também $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$, logo $H(x,y) = 12x^2 \cdot 12y^2 - (-4)^2 = 144x^2y^2 - 16$:

$\Rightarrow H(1,1) > 0$ e $f_{xx}(1,1) > 0$, $(1,1)$ é ponto de mínimo local.

O ponto $(0,0)$ pertence à fronteira da região.

Análise na fronteira:

Caso 1: $x=0$, $g(y) = y^4 + 2$, $g'(y) = 4y^3 > 0$ se $0 < y \leq 2$.

Como g é crescente o máximo absoluto de g ocorre em $y=2$ e o mínimo em $y=0$.

Caso 2: $x=3$, $g(y) = y^4 - 12y + 83$, $g'(y) = 4y^3 - 12$, $g''(y) = 12y^2$.
 $g'(y) = 0 \Rightarrow 4y^3 = 12 \Rightarrow y^3 = 3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{3}$.

Como $g''(\sqrt[3]{3}) > 0$, em $y = \sqrt[3]{3}$, g assume seu valor mínimo absoluto. Como $g(0) = 83$ e $g(2) = 75$, então o valor máximo absoluto de g em $[0,3]$ é 83.

Caso 3: $y=0$, $h(x)=x^4+2$, o mínimo absoluto ocorre em $x=0$ e o máximo absoluto em $x=3$.

Caso 4: $y=2$, $h(x)=x^4-8x+18$. Nesse caso $h'(x)=4x^3-8$ e $h'(x)=0$ quando $x=\sqrt[3]{2}$. Como $h''=12x^2>0$, em $x=\sqrt[3]{2}$, h assume seu valor mínimo absoluto. Também, $h(0)=18$ e $h(3)=75$, logo seu valor máximo absoluto ocorre em $x=3$ e é igual a 75.

Teremos então a seguinte tabela:

(x,y)	$f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2$	
$(0,0)$	2	
$(0,2)$	18	
$(3,\sqrt[3]{2})$	$83-9\sqrt[3]{2}\approx 70.01$	
$(3,2)$	75	
$(3,0)$	83	Valor máximo absoluto
$(\sqrt[3]{2},2)$	$10\sqrt[3]{2}+18\approx 30.6$	
$(1,1)$	0	Valor mínimo absoluto

$$(2) \quad dk = \frac{\partial K}{\partial m} dm + \frac{\partial K}{\partial v} dv = \frac{1}{2} v^2 dm + mv dv$$

Nas $\frac{|dm|}{m} \leq 0,01$, $\frac{|dv|}{v} \leq 0,03$, logo

$$|dk| \leq \frac{1}{2} v^2 \cdot 0,01m + mv \cdot 0,03v$$

$$|dk| \leq (0,01) \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 m\right) + (0,06) \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 m\right)$$

$$|dk| \leq 0,07 \left(\frac{1}{2} v^2 m\right) \Rightarrow |dk| \leq 0,07 K \Rightarrow \frac{|dk|}{K} \leq 0,07$$

O erro máximo na medida de K é 7%.

$$(3) \mu_x = f'(n) \cdot \pi_x = f'(n) \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{n} \cdot f'(n)$$

$$\mu_y = f'(n) \cdot \pi_y = \frac{f'(n)}{n} \cdot y, \quad \mu_z = \frac{f'(n)}{n} \cdot z$$

$$\mu_{xx} = \frac{f'(n)}{n} \cdot 1 + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f'(n)}{n} \right] = \frac{f'(n)}{n} + x \cdot \frac{f''(n) \cdot \pi_x \cdot n - \pi_x \cdot f'(n)}{n^2}$$

$$\mu_{xx} = \frac{f'(n)}{n} + \frac{x}{n^2} \cdot \left[f''(n) \cdot n \cdot \frac{x}{n} - \frac{x}{n} f'(n) \right]$$

$$\mu_{xx} = \frac{f'(n)}{n} + \frac{x^2}{n^2} f''(n) - \frac{x^2}{n^3} f'(n)$$

Analogamente, $\mu_{zz} = \frac{f'(n)}{n} + \frac{z^2}{n^2} f''(n) - \frac{z^2}{n^3} f'(n)$

$$\mu_{yy} = \frac{f'(n)}{n} + \frac{y^2}{n^2} f''(n) - \frac{y^2}{n^3} f'(n)$$

Sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz} &= 3 \frac{f'(n)}{n} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{n^2} f''(n) - \frac{1}{n^3} f'(n) \cdot [x^2 + y^2 + z^2] \\ &= 3 \frac{f'(n)}{n} + \frac{n^2}{n^2} f''(n) - \frac{1}{n^3} f'(n) \cdot n^2 \\ &= 2 \frac{f'(n)}{n} + f''(n) \end{aligned}$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)y - (x+2)}{(x-3)y + (x-3)} = \frac{(x+2)(y-1)}{(x-3)(y+1)} \Rightarrow \left(\frac{y+1}{y-1} \right) dy = \left(\frac{x+2}{x-3} \right) dx$$

Sol. constante: $y=1$

$$\int \left(1 + \frac{2}{y-1} \right) dy = \int \left(1 + \frac{5}{x-3} \right) dx \Rightarrow y + 2 \ln|y-1| = x + 5 \ln|x-3| + \text{const}$$

(5) $Q(t)$: quantidade de chumbo no tempo t
 $Q(0) = 1 \text{ g}$ $\frac{dQ}{dt} = aQ \Rightarrow Q(t) = 1 \cdot e^{at}$

Meia-vida: 3,3 horas $\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{a \cdot 3,3} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = a \cdot 3,3$

$$\Rightarrow a = \frac{\ln(0,5)}{3,3} \Rightarrow Q(t) = e^{\frac{\ln(0,5)}{3,3} t}$$

$$Q(t) = 1 - 0,9 = 0,1 \Rightarrow e^{\frac{\ln(0,5)}{3,3} t} = 0,1$$

$$\frac{\ln(0,5)}{3,3} t = \ln(0,1) \Rightarrow t = (3,3) \cdot \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,5)}$$

$$t \approx 10.96 \text{ horas}$$