

Prova III de B- (01/10/11) (Rec)

Nome:

Data:

1,5 (1) Emuncie e prove UM dos Testes abaixo:

a) Teste de Condensação de Cauchy

b) Teste de Raabe

c) Teste de Dirichlet

4,0 (2) Para cada série abaixo discuta sua convergência (absoluta ou condicional) ou divergência:

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{(n+1) 4^{2n+1}}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}, \quad a, b > 0$$

1,5 (3) Admita que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n$ é convergente e defina, para cada $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$A_m = q_0 + q_1 + \dots + q_m$$

Prove que para $|x| < 1$ a série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ converge

e que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$$

1,5 (4) Seja $\{a_n\}$ definida recursivamente por

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{m+1} = a_m + \frac{1}{m^2} a_{m-1}, \quad m \geq 2.$$

Estude a convergência da série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{a_m}.$$

(5) Seja $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ uma série de termos

positivos. Admita que esta série diverge e
ponha

$$S_m = a_1 + \dots + a_m, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $S_m \geq 1, \forall m \in \mathbb{N}$, a série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{S_m \ln^2 S_m} \quad \text{converge.}$$

Resolução Prova III - An. B - Cálculo II

2) b) Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\sin^2\left(\frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{m}\right)\right), \text{ logo}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{Mas } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} \right)^2 = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ converge, pelo Teste da Comparação

por limite, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)$ converge

e $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right))$ converge absolutamente.

c) Como $\left(\sum_{k=1}^n \sin(k)\right)$ é uma sequência limitada

e $\left(\frac{1}{n}\right)$ é decrescente e tende a zero, pelo

Teste de Dirichlet, a série converge.

Por outro lado, $|\sin m| \leq 1, \forall m \in \mathbb{N}$. Logo

$$\frac{|\sin m|}{m} \geq \frac{\sin^2 m}{m} = \frac{1 - \cos(2m)}{m}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2n)}{n}$ é divergente. De fato,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Mas $\left(\sum_{k=1}^n \cos(2k) \right)$ é limitada

e $\left(\frac{1}{n} \right)$ decresce e tende a zero, ou seja, pelo Teste de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2n)}{n}$ converge.

A soma de uma série convergente com uma divergente, é divergente. Logo, pelo teste da comparação,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(2n)}{n}$ diverge, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n}$ converge condicionalmente.

d) Seja $f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^b}$, $x > 1$. Então

$$f'(x) = \frac{a(\ln x)^{a-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^b - b x^{b-1} (\ln x)^a}{x^{2b}}$$

$$f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^{2b}} \cdot x^{b-1} \left[\frac{a - b}{\ln x} \right]$$

Como $a, b > 0$ e $x > 1$, $\frac{(\ln x)^a}{x^{2b}} > 0$ e
 existe $N \in \{2, 3, \dots\}$ tal que

$$x > N \Rightarrow \ln x > \frac{a}{b}.$$

Isso significa que, para $x > N$, $f(x) < 0$. Logo

$\left(\frac{(\ln n)^a}{n^b} \right)_{n \geq N}$ é decrescente.

Também observe que se $h, g: [N, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são
 dados por $g(x) = (\ln x)^a$ e $h(x) = x^b$, temos

$$g'(x) = a(\ln x)^{a-1} \cdot \frac{1}{x}, \quad g''(x) = a(a-1)(\ln x)^{a-2} \cdot \frac{1}{x^2}, \dots,$$

$$g^{(m)}(x) = a(a-1)\dots(a-(m-1))(\ln x) \cdot \frac{1}{x^m}$$

e

$$h'(x) = b x^{b-1}, \quad h''(x) = b(b-1)x^{b-2}, \quad \dots, \quad h^{(m)}(x) = b(b-1)\dots(b-(m-1))x^{b-m}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Provemos por indução estes resultados. O caso $m=1$
 é óbvio. Admita que

$$g^{(m)}(x) = a(a-1)\dots(a-(m-1))(\ln x) \cdot \frac{1}{x^m}$$

$$\begin{aligned} \text{então} \quad g^{(m+1)}(x) &= (g^{(m)}(x))' = a(a-1)\dots(a-(m-1))(a-m)(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^m} \\ &= a(a-1)\dots(a-m)(\ln x) \cdot \frac{1}{x^{m+1}} \end{aligned}$$

Na mesma forma, admita que $h^{(m)}(x) = b(b-1) \dots (b-(m-1)) x^{b-m}$
 então
 $h^{(m+1)}(x) = (h^{(m)}(x))' = b(b-1) \dots (b-(m-1)) (b-m) x^{b-m-1}$
 Isso prova o resultado.

Agora, pela prop. aritmética, existe k o menor
 natural tal que
 $a-k < 0$. Então

$$g^{(k)}(x) = a(a-1) \dots (a-(k-1)) (\ln x)^{a-k} \cdot \frac{1}{x^k}$$

$$h^{(k)}(x) = b(b-1) \dots (b-(k-1)) x^{b-k}$$

Pela regra de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a (\ln x)^{a-1}}{b x^b}$$

$$= \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{(k-1)}(x)}{h^{(k-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-(k-2)) (\ln x)^{a-(k-1)}}{b^{k-1} x^b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-(k-1)) (\ln x)^{a-k}}{b^k x^b} = 0 \text{ pois } a-k < 0.$$

$$\text{Assim } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{g(m)}{h(m)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\ln m)^a}{m^b} = 0.$$

Pelo Teste de Leibniz a série é convergente.

Analisemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^a$.

Suponha, $0 < b \leq 1$. Como existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\ln n > 1$, $\forall n \geq N$, então $\frac{(\ln n)^a}{n^b} > \frac{1}{n^b}$, $\forall n \geq N$.

Pelo Teste da Comparação a série diverge.

Suponha $b > 1$, então podemos escrever:

$$\frac{(\ln n)^a}{n^b} = \frac{(\ln n)^a}{n^\varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{b-\varepsilon}}, \text{ onde } 0 < \varepsilon < b-1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b-\varepsilon}}$ converge e $\left(\frac{(\ln n)^a}{n^\varepsilon} \right)$ é monotônica
(para n suf. grande)

e convergente, pelo teste de Abel a série converge.

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ é condicionalmente convergente se $0 < b \leq 1$ e

absolutamente convergente se $b > 1$.

3) Considere o produto de Cauchy das séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ onde } c_n = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n a_k = a_n x^n$$

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é o produto de Cauchy das séries

em questão. Como $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pois $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

e (x^n) é monotona e convergente (Teste de Abel).

Pelo Teorema de Abel, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

4) Vide Caderno

5) Vide Lista.