

Prova 3-Cálculo 2-2022/2

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Seja $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

- Encontre e esboce o domínio de f .
- Descreva e esboce o diagrama de contornos de f .
- Utilizando os Itens (a) e (b), esboce o gráfico de f .

2. Existe o limite de $f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Explique.

3. Uma partícula se move ao longo de um círculo de raio r com velocidade v . Sua aceleração centrípeta é então dada por $a = \frac{v^2}{r}$. Sabe-se que o erro relativo porcentual na medida de v é de, no máximo, 4% e na medida de r é de, no máximo, 3%. Usando diferenciais, encontre o erro relativo porcentual máximo aproximado na medida de a .

4. Suponha que $w = f(u)$, sendo

$$u = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que $xw_x + yw_y = 0$.

5. Sendo $f(x, y, z) = \frac{2z}{\sqrt{xy^2 + z^3}}$, determine f_{zx} e f_{yz} .

6. Um gasoduto deve ser construído do ponto P ao ponto S e deve passar por regiões onde o custo de produção difere (veja Figura 1). O custo por quilômetro (em dólares) de P a Q é de \$300.000, de Q a R é de \$200.000 e de R a S é de \$100.000. Encontre x e y tal que o custo total de construção do gasoduto seja o menor possível.

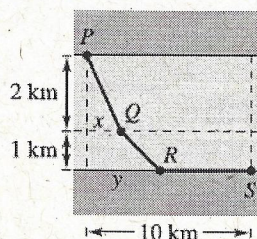


Figure 1: Questão 5.

Prova 3-Cálculo 2-2022/2

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Seja $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.
 - a. Encontre e esboce o domínio de f .
 - b. Descreva e esboce o diagrama de contornos de f .
 - c. Utilizando os Itens (a) e (b), esboce o gráfico de f .
2. Existe o limite de $f(x, y) = \frac{x + y}{|x - y|}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Explique.
3. Uma partícula se move ao longo de um círculo de raio r com velocidade v . Sua aceleração centrípeta é então dada por $a = \frac{v^2}{r}$. Sabe-se que o erro relativo porcentual na medida de v é de, no máximo, 3% e na medida de r é de, no máximo, 2%. Usando diferenciais, encontre o erro relativo porcentual máximo aproximado na medida de a .
4. Sendo $f(x, y, z) = \frac{z^2 x}{\sqrt{xy^2 + z^3}}$, determine f_{zx} e f_{yz} .
5. Suponha que $w = f(u)$, sendo f uma função diferenciável da variável u e

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que $xw_x + yw_y = 0$.

6. Um gasoduto deve ser construído do ponto P ao ponto S e deve passar por regiões onde o custo de produção difere (veja Figura 1). O custo por quilômetro (em dólares) de P a Q é de \$300.000, de Q a R é de \$200.000 e de R a S é de \$100.000. Encontre x e y tal que o custo total de construção do gasoduto seja o menor possível.

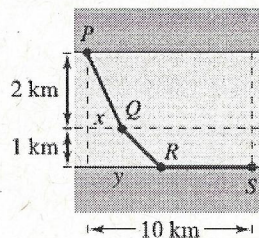


Figure 1: Questão 5.

Prova 3-Cálculo 2-2022/2

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Seja $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$.

- Encontre e esboce o domínio de f .
- Descreva e esboce o diagrama de contornos de f .
- Utilizando os Itens (a) e (b), esboce o gráfico de f .

2. Existe o limite de $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Explique.

3. Uma partícula se move ao longo de um círculo de raio r com velocidade v . Sua aceleração centrípeta é então dada por $a = \frac{v^2}{r}$. Sabe-se que o erro relativo porcentual na medida de v é de, no máximo, 2% e na medida de r é de, no máximo, 1,5%. Usando diferenciais, encontre o erro relativo porcentual máximo aproximado na medida de a .

4. Sendo $f(x, y, z) = \frac{2xy}{\sqrt{xy^2 + z^3}}$, determine f_{zx} e f_{yz} .

5. Suponha que $w = f(u)$, sendo

$$u = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que $xw_x + yw_y = 0$.

6. Um gasoduto deve ser construído do ponto P ao ponto S e deve passar por regiões onde o custo de produção difere (veja Figura 1). O custo por quilômetro (em dólares) de P a Q é de \$300.000, de Q a R é de \$200.000 e de R a S é de \$100.000. Encontre x e y tal que o custo total de construção do gasoduto seja o menor possível.

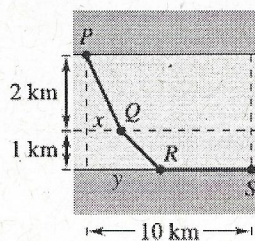
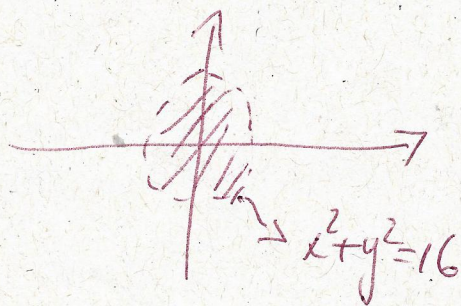


Figure 1: Questão 5.

① a) $16 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 16$

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16\}$



b) $\frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = k$

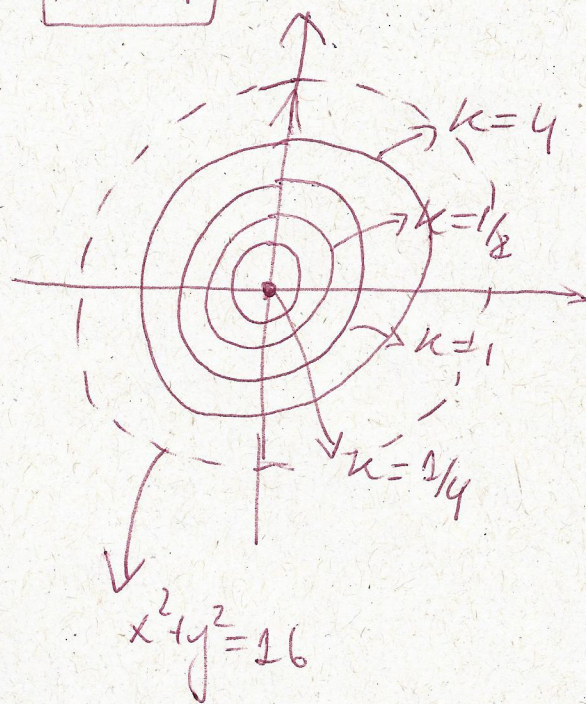
$\Rightarrow \frac{1}{k^2} = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 - \frac{1}{k^2}$

$16 - \frac{1}{k^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq 16 \Rightarrow k^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{k \geq \frac{1}{4}} \text{ (pois } k > 0)$

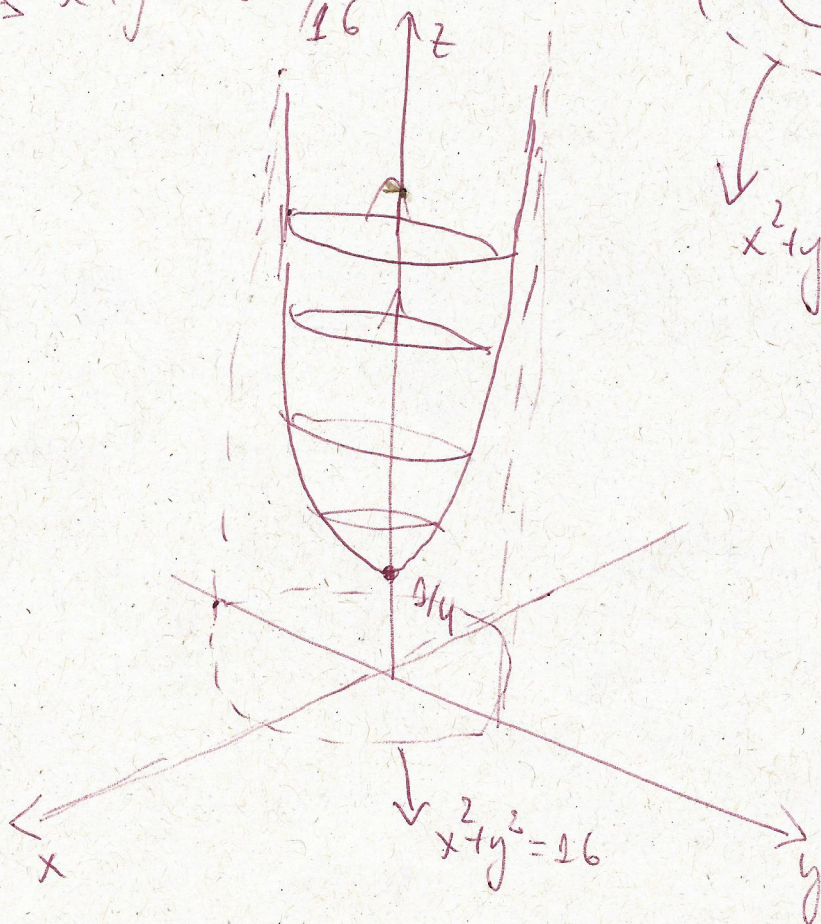
$k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 15$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 - 4 = 12$

$k = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 - \frac{1}{16}$



c)



2) Se $y=0$ temos $f(x,0) = \frac{x}{|x|}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ não

existe, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$

Logo o limite não existe.

$$5) w_x = f'(u) \cdot u_x = f'(u) \cdot \left[\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$w_x = f'(u) \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

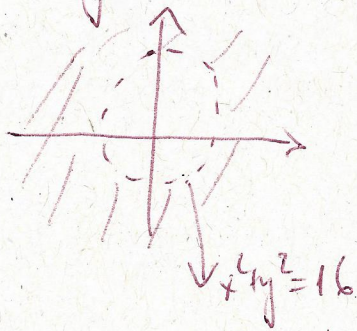
$$w_y = f'(u) \cdot u_y = f'(u) \cdot \left[\frac{-2y(x^2+y^2) - 2y \cdot (x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$w_y = f'(u) \cdot \left[\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

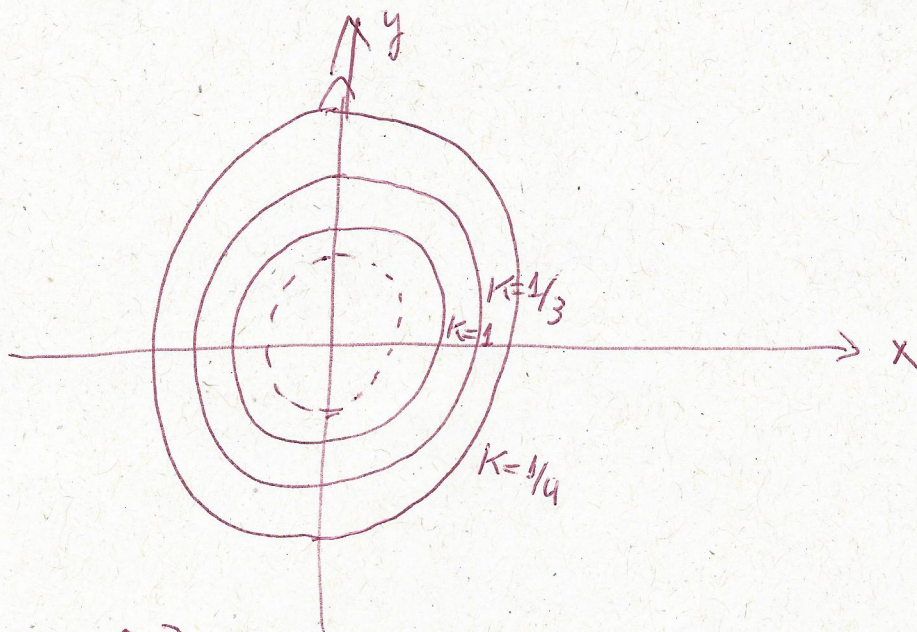
$$\text{Logo } x w_x + y w_y = f'(u) \cdot \left[x \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4yx^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$= \frac{f'(u)}{(x^2+y^2)^2} \cdot (4x^2y^2 - 4y^2x^2) = 0$$

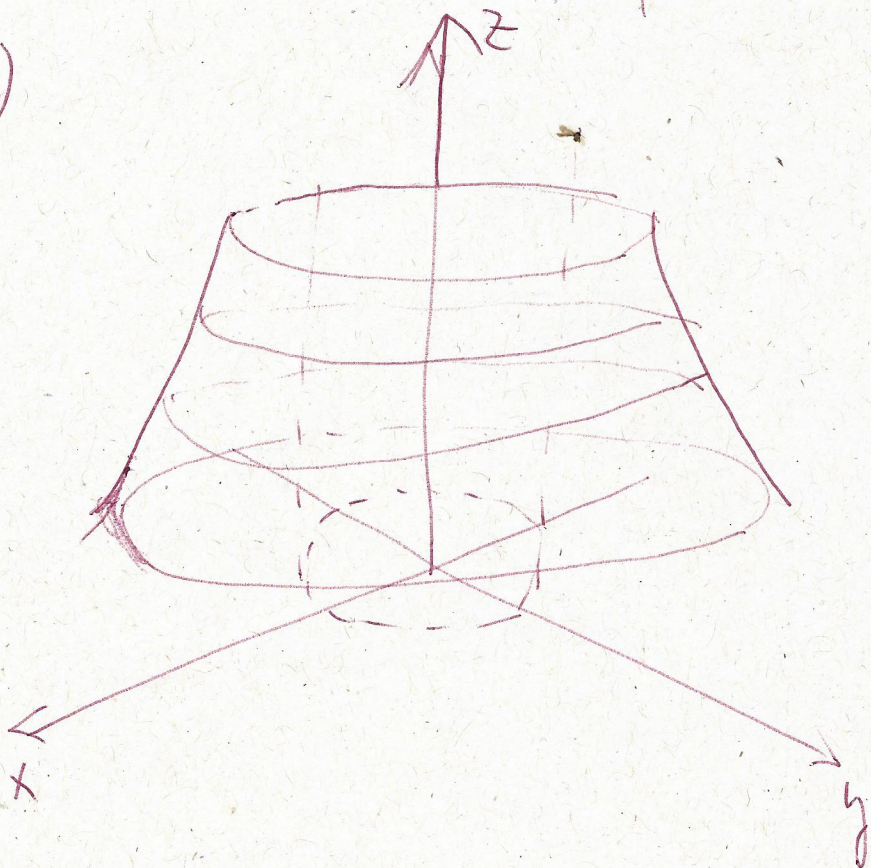
$$1) a) x^2 + y^2 - 16 > 0 \Rightarrow D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 16\}$$



$$b) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}} = K \Rightarrow \frac{1}{K^2} = x^2 + y^2 - 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 + \frac{1}{K^2}$$



c)



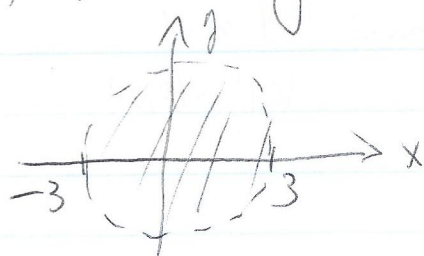
2) Se $y=0$ temos $f(x,0)=0$. Se $y=x^2$ temos,
 $f(x,x^2) = \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$, logo não existe o limite.

4) $f(x,y) = 2xy(xy^2+z^3)^{-1/2}$
 $f_z = 2xy \cdot -\frac{1}{2} \cdot (xy^2+z^3)^{-3/2} \cdot 3z^2 = -3xy z^2 (xy^2+z^3)^{-3/2}$
 $f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-3y z^2 (xy^2+z^3)^{-3/2} \right] = -3y z^2 \left[(xy^2+z^3)^{-3/2} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (xy^2+z^3)^{-5/2} \cdot y^2 \right]$
 $f_{zx} = -3y z^2 (xy^2+z^3)^{-5/2} \left[(xy^2+z^3) - \frac{3xy^2}{2} \right]$
 $f_{zx} = -3y z^2 (xy^2+z^3)^{-5/2} \left[z^3 - \frac{1}{2}xy^2 \right]$

$f_{yz} = f_{zy}$
 $f_{zy} = -3xz^2 \left[(xy^2+z^3)^{-3/2} + y \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (xy^2+z^3)^{-5/2} \cdot 2xy \right]$
 $f_{zy} = -3xz^2 (xy^2+z^3)^{-5/2} \left[1 \cdot (xy^2+z^3) - 3xy^2 \right]$
 $f_{zy} = -3xz^2 (xy^2+z^3)^{-5/2} \left[z^3 - 2xy^2 \right]$

Gabrito - P3 - Cálculo 2 - 2022/02

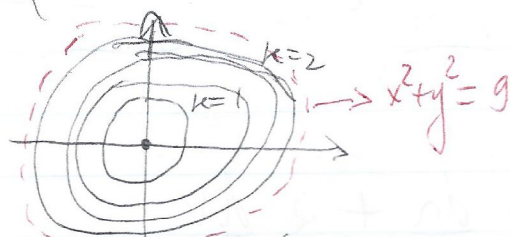
1) a) $9 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 9$, $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9\}$



b) $\frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = k \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 9 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{k^2}$

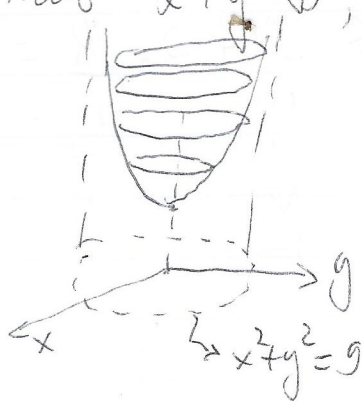
$9 - \frac{1}{k^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < 9 \Rightarrow k^2 > \frac{1}{9} \Rightarrow k > \frac{1}{3}$

$x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{k^2}$ (círculos centrados na origem), de raio $\sqrt{9 - \frac{1}{k^2}}$



A medida que (x, y) se aproxima da borda do círculo $x^2 + y^2 = 9$, $f(x, y)$ tende a $+\infty$:

c)



$$2) \left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3|}{|x^2 + y^2|} + \frac{|x|y^2}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x|^3}{|x|^2} + \frac{|x| \cdot |y|^2}{|y|^2} = |x| + |x| \xrightarrow{|x|^2 \cdot |x|}$$

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 2|x| ; \text{ como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0, \text{ entao}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$3) a = v^2 \cdot n^{-1}, \quad \left| \begin{array}{l} da = \frac{\partial a}{\partial n} dn + \frac{\partial a}{\partial v} dv \\ \frac{\partial a}{\partial n} = -v^2 n^{-2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial a}{\partial n} = -v^2 n^{-2}$$

$$da = -v^2 n^{-2} dn + 2vn^{-1} dv$$

$$\frac{\partial a}{\partial v} = 2vn^{-1}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{-v^2 n^{-2}}{v^2 n^{-1}} dn + \frac{2vn^{-1}}{v^2 n^{-1}} dv$$

$$\frac{da}{a} = -\frac{dn}{n} + 2 \frac{dv}{v}$$

$$\left| \frac{da}{a} \right| \leq \left| \frac{dn}{n} \right| + 2 \left| \frac{dv}{v} \right| \leq \frac{3}{100} + 2 \cdot \frac{4}{100} = \frac{11}{100}$$

$\downarrow$
3%

$\downarrow$
4%

$$4) w_x = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w_y = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x^2 y + y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



$$xw_x + yw_y = \left(-x^3/y + xy^3 + yx^3 - xy^3 \right) f'(u) = 0$$

$$5) f(x, y, z) = 2z \cdot (xy^2 + z^3)^{1/2}$$

$$f_z = 2(xy^2 + z^3)^{1/2} + 2z \cdot \frac{1}{2} (xy^2 + z^3)^{-1/2} \cdot 3z^2$$

$$f_z = 2(xy^2 + z^3)^{1/2} + 3z^3(xy^2 + z^3)^{-1/2}$$

$$f_{zx} = 2 \cdot \frac{1}{2} (xy^2 + z^3)^{-1/2} \cdot y^2 + 3z^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (xy^2 + z^3)^{-3/2} \cdot y^2$$

$$f_{zx} = (xy^2 + z^3)^{-1/2} \cdot y^2 - \frac{3}{2} z^3 y^2 (xy^2 + z^3)^{-3/2}$$

$$f_y = 2z \cdot \frac{1}{2} (xy^2 + z^3)^{-1/2} \cdot 2xy = 2xyz(xy^2 + z^3)^{-1/2}$$

$$f_{yz} = 2xy(xy^2 + z^3)^{-1/2} + 2xyz \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (xy^2 + z^3)^{-3/2} \cdot 3z^2$$

$$f_{yz} = 2xy(xy^2 + z^3)^{-1/2} - 3xyz^3(xy^2 + z^3)^{-3/2}$$

$$K = 100.000$$

$$6) C(x, y) = \sqrt{4+x^2} \cdot 3K + \sqrt{1+(y-x)^2} \cdot 2K + (10-y)K$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 3K \cdot \frac{1}{2} (4+x^2)^{-1/2} \cdot 2x + 2K \cdot \frac{1}{2} (1+(y-x)^2)^{-1/2} \cdot 2(y-x) \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 2K \cdot \frac{1}{2} (1+(y-x)^2)^{-1/2} \cdot 2(y-x) - K$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 3Kx(4+x^2)^{-1/2} - 2K(y-x)(1+(y-x)^2)^{-1/2} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 2K(y-x)(1+(y-x)^2)^{-1/2} - K = 0 \Rightarrow \boxed{2(y-x) \cdot (1+(y-x)^2)^{-1/2} = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x} = 3Kx \cdot (4+x^2)^{-1/2} - K = 0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}} = 1 \Rightarrow 9x^2 = 4+x^2 \Rightarrow 8x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{-1/2} = 1, \quad y - \frac{1}{\sqrt{2}} = t$$

$$2t(1+t^2)^{-1/2} = 1 \Rightarrow 4t^2(1+t^2)^{-1} = 1$$

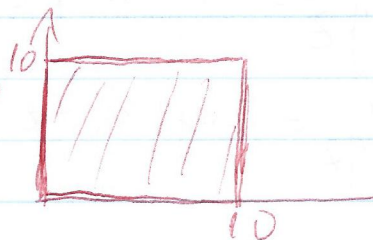
~~$$4t^4 + 4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = -4 \pm \sqrt{16}$$~~

$$\frac{4t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 4t^2 = 1+t^2 \Rightarrow 3t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10}$$



Tomamos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ como candidatas

a ser solução. Mas para isso devemos analisar a função custo na fronteira da região.

Analisando na fronteira:

$$\Rightarrow x=0, \quad 0 \leq y \leq 10$$

$$C(y) = 6K + 2K\sqrt{1+y^2} + (10-y)K, \quad C'(y) = 2K \cdot \frac{1}{2} \cdot 2y(1+y^2)^{-1/2} - K$$

$$C'(y)=0 \Rightarrow \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \Rightarrow 4y^2 = 1+y^2 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1/\sqrt{3}}$$

Pontos para análise: $(0, 0)$, $(0, 1/\sqrt{3})$, $(0, 10)$.

$$\Rightarrow y=0, \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$C(x) = 3K\sqrt{4+x^2} + 2K\sqrt{1+x^2} + 10K, \quad C'(x) = 3K \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(4+x^2)^{-1/2} + 2K \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(1+x^2)^{-1/2}$$

Como $C'(x) > 0$, C é crescente em $[0, 10]$, o mínimo ocorre em $(0, 0)$.

$$\Rightarrow x=10, \quad 0 \leq y \leq 10$$

$$C(y) = 3K\sqrt{104} + 2K\sqrt{1+(y-10)^2} + K(10-y)$$

$$C'(y) = 2K \cdot \frac{1}{2} (1+(y-10)^2)^{-1/2} \cdot 2(y-10) - K < 0 \quad (\text{pois } 0 \leq y \leq 10).$$

Logo C é decrescente e o mínimo ocorre em $(10, 10)$.

$$\Rightarrow y=10, \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$C(x) = 3K\sqrt{4+x^2} + 2K\sqrt{1+(10-x)^2}$$

$$C'(x) = 3K \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(4+x^2)^{-1/2} + 2K \cdot \frac{1}{2} (1+(10-x)^2)^{-1/2} \cdot 2(10-x) \cdot (-1)$$

$$C'(x) = \frac{3Kx}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{2K(10-x)}{\sqrt{1+(10-x)^2}}$$

Se C tiver um ponto crítico, ele ocorre quando $\frac{3Kx^*}{\sqrt{4+(x^*)^2}} = \frac{2K(10-x^*)}{\sqrt{1+(10-x^*)^2}}$,
para algum $0 < x^* < 10$. Esse ponto deve então

satisfazer: $9x^{*2} = \frac{4(4+(x^*)^2)(10-x^*)^2}{1+(10-x^*)^2}$, ou seja:

$$g(x^*)^2 + g(x^*)^2(10-x^*)^2 = (16 + 4(x^*)^2)(10-x^*)^2$$

$$g(x^*)^2 = (16 - 5(x^*)^2)(10-x^*)^2 \Rightarrow \text{Essa equação tem uma}$$

Solução (numérica), dada por $x^* \approx 1,7656$

(x, y)	Custo = $K [3\sqrt{4+x^2} + \sqrt{1+(y-x)^2} \cdot 2 + (10-y)]$
$(0, 0)$	$K \cdot [6 + 2 + 10] = 18K$
$(0, 10)$	$K \cdot [6 + 2 \cdot \sqrt{101}]$
$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$K \cdot [6 + 2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{3}} + 10 - \frac{1}{\sqrt{3}}] = K \cdot [16 + \frac{3}{\sqrt{3}}] \approx (17,7320)K$
$(10, 10)$	$K \cdot [3\sqrt{104} + 2]$
$(10, 0)$	$K \cdot [3 \cdot \sqrt{104} + 2\sqrt{101}]$
$(1,7656, 10)$	$\approx K \cdot [24,59]$
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}})$	$K \cdot [3 \cdot \sqrt{4+\frac{1}{2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2}} \cdot 2 + 10 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}]$ $\checkmark K \cdot [3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + 10 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}] = K \cdot [\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + 10]$ $\Downarrow$ $\approx 17,38K$

Logo $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ são os pontos onde

devem ser posicionados os portos para que o custo seja mínimo.