

Florianópolis, 05 de junho de 2017.
Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
2ª Prova de Cálculo C (MTM5163)

Nome: _____

Matrícula: _____ Turma: 03212

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	2½	3	2½	2	10
Nota:					

Instruções

- Não serão aceitas respostas sem justificativa e/ou cálculos;
- Não é permitido o uso de celular, tablet e afins. Pode-se usar calculadora científica não programável.

Boa prova!

1. [2½ Pontos] Suponha que o eixo- z carrega uma densidade de carga elétrica constante de $\lambda > 0$ Coulomb por metro e que

$$\vec{E}(x, y, z) = 2\lambda \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$$

é o campo elétrico resultante. Calcule o fluxo de $\vec{E}$ para fora do cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, para $0 \leq z \leq h$.

2. [3 Pontos] Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sin(y^2 - z^2) + xy^2)\vec{i} + x^3e^{-z^2-1}\vec{j} + (-y + x^2z)\vec{k}$$

através da superfície S que é o gráfico da função $z = 16 - x^2 - y^2$ com domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 32\}.$$

Considere a orientação de S para cima.

3. [2½ Pontos] Considere $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + \cos(xy)z\vec{k}$. Calcule

$$\int \int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds,$$

sendo S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ localizada abaixo do plano xy e orientada para fora.

4. [2 Pontos] Determine a área da parte do plano $2x + 4y + z = 10$ que está no primeiro octante.

Resolução P2 - Cálculo C - 2017-'01'

①



$$S: \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{matrix}$$

$$\text{Fluxo} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds, \quad ds = R \, dz \, d\theta$$

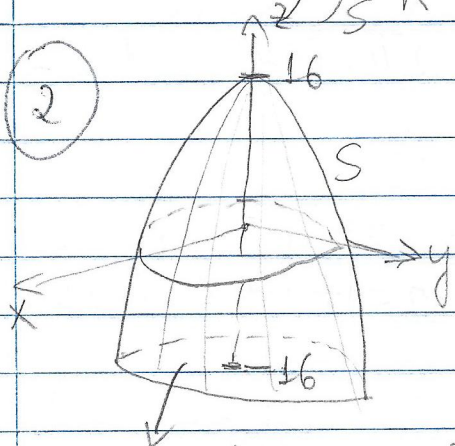
$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{2\lambda}{R^2} (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \cdot (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \quad \vec{n} = \frac{(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)}{R}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{2\lambda}{R}$$

$$\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\text{Fluxo} = \iint_S \frac{2\lambda}{R} \, ds = \frac{2\lambda}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^h R \, dz \, d\theta = 4\pi \lambda h$$

②



$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 32$$

$$-32 \leq -(x^2 + y^2) \leq 0$$

$$-16 \leq 16 - x^2 - y^2 \leq 16$$

y fundo não faz parte
S: fundo

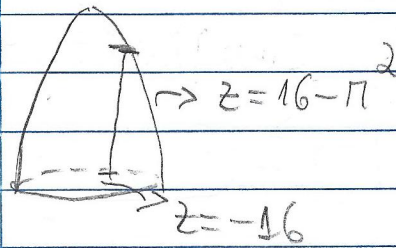
Pelo Teorema da divergência:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds + \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dv$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dv - \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = y^2 + x^2$$

$$\Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dv = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} \int_{-16}^{16-\pi^2} \pi \cdot \pi \, dz \, d\pi \, d\phi$$



$$0 \leq \pi \leq \sqrt{32}$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} \pi^3 (16 - \pi^2 - (-16)) \, d\pi \, d\phi$$

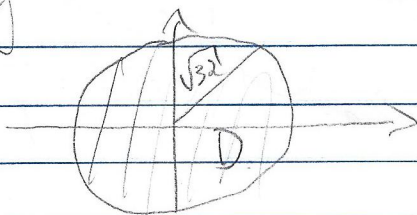
$$\begin{aligned} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} \pi^3 (32 - \pi^2) \, d\pi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{32\pi^4}{4} - \frac{\pi^6}{6} \right) \Big|_0^{\sqrt{32}} d\phi \\ &= 2\pi \left[\frac{8 \cdot (\sqrt{32})^4}{1} - \frac{(\sqrt{32})^6}{6} \right] = 2\pi \left(8 \cdot (32)^2 - \frac{(32)^3}{6} \right) \end{aligned}$$

$$= 2\pi \cdot (32)^2 \left[\frac{8 - 32}{6} \right] = 2\pi \cdot (32)^2 \cdot \frac{16}{6} = \frac{16384\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S': \vec{n} = -\vec{k}, \quad \vec{F} \cdot \vec{n} = (-y + x^2 \cdot (-16))$$

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S'} (-y - 16x^2) \, ds = \iint_D (-y - 16x^2) \, dA$$

S' : gráfico da função $z = -16$ com do mínimo
 $ds = \sqrt{1+0+0} \, dA = dA$

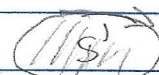
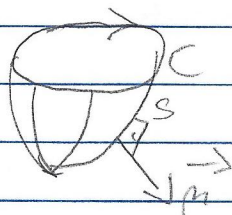


$$\begin{aligned}\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} (R \sin \theta + R^2 \cdot 16 \cdot \cos^2 \theta) R \, dR \, d\theta \\ &= -16 \cdot \left(\frac{R^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{32}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= -16 \cdot \left(\frac{R^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{32}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = -4\pi \cdot (\sqrt{32})^4 \\ &= -4096\pi\end{aligned}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{16384\pi}{3} + 4096\pi = \frac{28672\pi}{3}$$

ando

(3)



$\sqrt{32}$
do

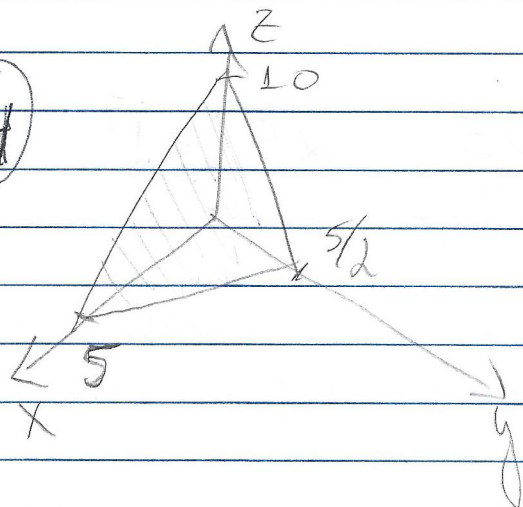
$$\text{rot } \vec{F} = (-\sin(xy) \cdot x \cdot z, 0 + \sin(xy) y z, 1 - (-1))$$

Em S' , $z=0$ e $\vec{n} = -\vec{k}$, logo

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = -2$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S'} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = -2 \iint_{S'} ds = -2 \cdot \pi \cdot 1^2 = -2\pi$$

(4)



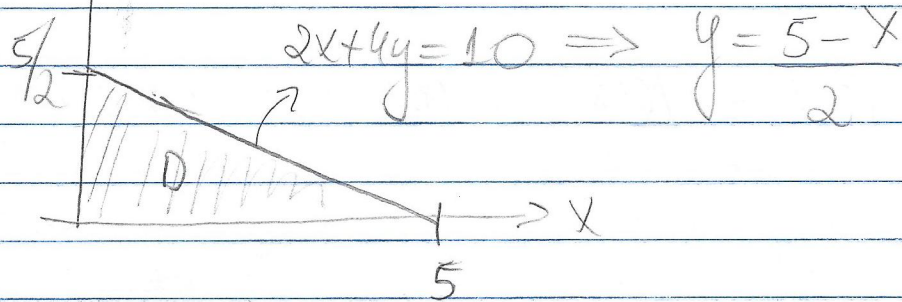
$$z = 10 - 2x - 4y$$

$$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dA$$

$$ds = \sqrt{1 + 4 + 16} \, dA$$

$$ds = \sqrt{21} \, dA$$

Área = $\iint_D \sqrt{21} \, dA$, sendo a região
D dada por



$$\text{Área} = \sqrt{21} \int_0^5 \int_0^{(5-x)/2} dy \, dx$$

$$= \sqrt{21} \int_0^5 \frac{(5-x)}{2} dx = \frac{5 \cdot \sqrt{21}}{2} x \Big|_0^5 - \frac{1 \cdot \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^5$$

$$= \frac{5 \sqrt{21}}{2} \cdot 5 - \frac{1 \cdot \sqrt{21}}{4} \cdot 25$$

$$= \sqrt{21} \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right) = \frac{25 \sqrt{21}}{4}$$