

Recuperação - Cálculo C - 2017/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

- 1,5 1. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Mostre que $P_y = Q_x$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que C é o círculo $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Por que o resultado não contradiz o Teorema de Green?

- 2,0 2. Determine

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds,$$

sendo $\vec{F}(x, y, z) = x^2 z^2 \vec{i} + y^2 z^2 \vec{j} + xyz \vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação para cima.

- 2,0 3. Seja S a superfície correspondente à junção da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com a parte desse cilindro que está dentro da esfera. Determine o fluxo do campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + 3y^2x + 3z^2x)\vec{i} + (xz - 1)\vec{j} + (z^3 - xz - yx)\vec{k}$$

para fora de S .

- 4,5 4. Encontre a solução geral da EDO

$$y^{(6)}(x) + 50y^{(4)}(x) + 625y''(x) = 625.$$

- 4,5 5. Escreva a função

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin(3t), & 0 < t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < t < \pi \\ 1, & t > \pi \end{cases}$$

em termos de funções do tipo degrau unitário. Utilize a expressão resultante para calcular a transformada de Laplace da função f .

- 1,5 6. Calcule

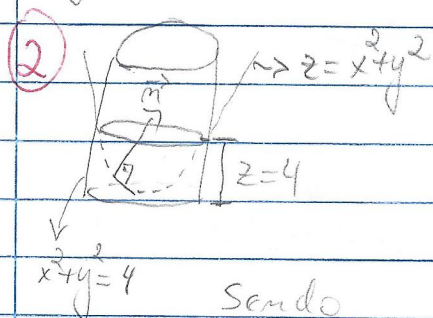
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3s}s}{s^2 + s + 2} \right\} (t).$$

REC - Cálculo C - 2017/01 - Gabarito

① $\vec{r}(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt = 2\pi$$

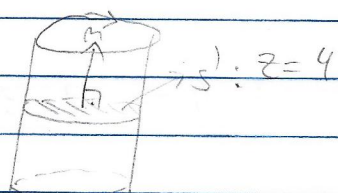
Embora $P_y = Q_x$, a região tem um "buraco" que é $(0,0)$, logo o Teorema de Green não é válido.



$$x^2 + y^2 = 4 = z \Rightarrow \boxed{z = 4}$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S'} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} ds,$$

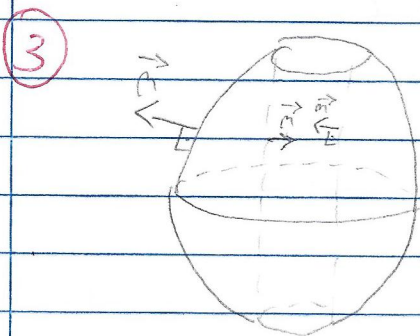
sendo S' a superfície abaixo:



Nesse caso, $\vec{n} = \vec{k}$, $ds = dA$ pois $ds = \sqrt{1+0^2+0^2} dA$.

Como $\text{rot } \vec{F} = (xz - 2y^2z, 2xz - yz, 0)$, temos $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ e assim

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0.$$

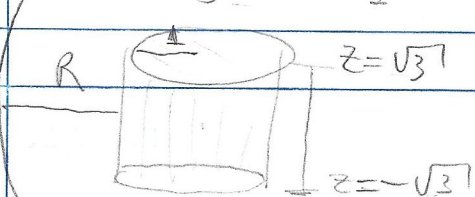


A superfície S engloba uma região sólida. Logo podemos usar o Teorema da divergência:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dv = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3z - x) dv$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} (3R^2 + 3z^2 - R \cos \theta) R dR d\theta dz$$

$$R^2 = 4 - z^2$$



pois $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$ implicam em $z^2 = 3$

DATAPEL

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} (3R^3 + 3Rz^2 - R \cos \theta) dR d\theta dz$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3R^4}{4} + \frac{3R^2 z^2}{2} \right] \Big|_1^{\sqrt{4-z^2}} d\theta dz, \text{ pois } \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\pi \cdot \left[\frac{3(4-z^2)^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3z^2}{2} (4-z^2) - \frac{3z^2}{2} \right] dz$$

$$= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{3(16-8z^2+z^4)}{4} - \frac{3}{4} + 6z^2 - \frac{3z^4}{2} - \frac{3z^2}{2} \right] dz$$

$$= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{45-3z^2-3z^4}{4} \right] dz = 2\pi \left[\frac{45z}{4} - \frac{3z^3}{2} - \frac{3z^5}{45} \right] \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{45 \cdot 2\sqrt{3}}{4} - \frac{1 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot 18\sqrt{3}}{20} \right] = 2\pi \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{45}{2} - 3 - \frac{27}{10} \right)$$

$$= 2\pi \sqrt{3} \cdot \frac{225-30-27}{10} = \pi \sqrt{3} \cdot 168$$

4) $y^{(6)}(x) + 50y^{(4)}(x) + 625y''(x) = 0$

$$\lambda^6 + 50\lambda^4 + 625\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 [\lambda^4 + 50\lambda^2 + 625] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 [\lambda^2 + 25] = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow y_1(x) = 1, y_2(x) = x$$

Demais soluções: $y_3(x) = \cos(5x), y_4(x) = \sin(5x)$

$$y_5(x) = x \cos(5x), y_6(x) = x \sin(5x)$$

$$\leadsto \text{Sol. particular: } y_p(x) = Ax^2, y_p' = 2Ax, y_p'' = 2A$$

$$\text{Subst. na EDO: } 625 \cdot 2A = 625 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\leadsto \text{Sol. geral: } y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(5x) + C_4 \sin(5x) + C_5 x \sin(5x) + C_6 x \cos(5x) + \frac{x^2}{2}$$

$$(5) f(t) = (1 - u_{\pi/2}(t)) e^{-2t} \sin(3t) + u_{\pi/2}(t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

$$e^{-2t} \sin(3t) = e^{-2(t - \pi/2 + \pi/2)} \cdot \sin(3(t - \pi/2 + \pi/2))$$

$$= e^{-2(t - \pi/2)} \cdot e^{-\pi} \cdot \left[\sin(3(t - \pi/2)) \cdot \cos 3\pi/2 + \cos(3(t - \pi/2)) \cdot \sin 3\pi/2 \right]$$

$$= e^{-2(t - \pi/2)} \cdot e^{-\pi} \cdot \cos(3(t - \pi/2))$$

$$\mathcal{L}\{u_{\pi/2}(t) e^{-2t} \sin(3t)\}(s) = -e^{-\pi} \mathcal{L}\{u_{\pi/2}(t) e^{-2(t - \pi/2)} \cdot \cos(3(t - \pi/2))\}(s)$$

$$= -e^{-\pi} \cdot \left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \right] \cdot e^{-\pi/2s}$$

Logo

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9} + e^{-\pi} \left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \right] \cdot e^{-\pi/2s} + \frac{e^{-\pi/s}}{s}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \frac{s}{s^2+s+2} &= \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4}} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \\
 &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+s+2} \right\} (t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{7}} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-3s} \frac{s}{s^2+s+2} \right\} (t) = \mathcal{U}_3(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-3)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{7}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}(t-3)\right) \right]$$