

2007/01

Cálculo IV- Prova 1

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. (1,6 pontos) Expresse a solução geral de cada equação abaixo em termos de uma série de potências (ou uma série de Frobenius) em torno do ponto x_0 indicado. Determine o intervalo de convergência da série obtida. Não é necessário determinar os coeficientes da série.

a. $(1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0, x_0 = -1.$

b. $(x^2-1)y''(x) + x(1+x)y'(x) - (1-x^2)y(x) = 0, x_0 = 1$

2. (3,4 pontos) A equação de Bessel de ordem $1/2$ é dada por

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - (1/4))y = 0$$

e uma das suas soluções é dada por

$$y_1(x) = x^{1/2} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m |x|^{2m}}{(2m+1)!} \right).$$

Mostre que uma segunda solução dessa equação é dada por

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left(c_0 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m |x|^{2m}}{(2m)!} + c_1 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m |x|^{2m+1}}{(2m+1)!} \right).$$

3. (2,5 pontos) Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial

$$x^2y''(x) - \frac{3}{4}y(x) = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = \gamma,$$

permaneça limitada quando $x \rightarrow 0$.

4. (2,5 pontos) Resolva o seguinte problema de Sturm-Liouville: Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e soluções não triviais $y(x)$ associadas do problema

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < L, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Resolução da prova 2:

2007/01

① a) $(1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0, x_0 = -1$

Como $P(x) = 1+x^2$, $x_0 = -1$ é ponto ordinário dessa equação. Portanto a solução geral é dada por:

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+1)^n + c_2 \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x+1)^n$$

O raio de $P(x)$ é ∞ e i , logo o raio de convergência é $n = |x+1|$ (onde $\text{Re}(x) = -1$) e o intervalo de convergência é

$$(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$$



b) $(x^2-1)y''(x) + x(1+x)y'(x) - (1-x^2)y(x) = 0, x_0 = 1$ é ponto singular

$P(x) = x^2-1, Q(x) = x(1+x), R(x) = -(1-x^2)$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot x(1+x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1+x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \\ q_0 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \cdot [-(1-x^2)]}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_0 = 1 \text{ é ponto singular} \\ \text{regular} \end{array}$$

Eq. indicial: $n(n-1) + p_0 n + q_0 = 0 \Rightarrow n^2 - n + n + 0 = 0 \Rightarrow n_1 = n_2 = 0$

Pelo Método de Frobenius temos:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x-1|^n \text{ e } y_2(x) = y_1(x) \cdot \ln|x-1| + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n |x-1|^n$$

A solução geral é dada por $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. O raio de convergência é $R=2$ e o intervalo de convergência é:

$$(-1, 1) \cup (1, 3)$$

② Como $\nu = 1/2$ temos $2\nu = 1$ um inteiro logo:

$$y_2(x) = a \cdot \ln|x| \cdot y_1(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |x|^{n-1/2}$$

considerando $x > 0$, temos

$$y_2'(x) = a \cdot \frac{1}{x} \cdot y_1(x) + a \cdot \ln x \cdot y_1'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2) x^{n-3/2}$$

$$y_2''(x) = -\frac{1}{x^2} a y_1(x) + \frac{a}{x} y_1'(x) + a \cdot \frac{1}{x} \cdot y_1'(x) + a \cdot \ln x \cdot y_1''(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2)(n-3/2) x^{n-5/2}$$

Substituindo na equação temos:

$$\begin{aligned} & -a y_2(x) + a \cdot x \cdot y_2'(x) + a \cdot x \cdot y_2''(x) + a x^2 \ln x \cdot y_1''(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2)(n-3/2) x^{n-1/2} \\ & + a y_2(x) + a x \ln x \cdot y_1'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2) x^{n-1/2} + a \ln x \cdot y_1(x) \cdot x^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+3/2} \\ & - \frac{1}{4} a \ln x y_1(x) - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n-1/2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ln x [a y_1''(x) \cdot x^2 + a \cdot x \cdot y_1'(x) + a \cdot x^2 \cdot y_1(x) - \frac{1}{4} a y_1(x)] + 2a x y_1'(x) + \\ & + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2)(n-3/2) x^{n-1/2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n-1/2) x^{n-1/2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+3/2} \\ & - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n-1/2} = 0 \end{aligned}$$

$$2a x y_1'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n [(n-1/2)(n-3/2) + (n-1/2) - 1/4] x^{n-1/2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+3/2} = 0$$

Como $y_1'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \cdot (2m+1/2) x^{2m-1/2}}{(2m+1)!}$ teremos

$$\begin{aligned} & a x^{1/2} + 2a \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m (2m+1/2) x^{2m+1/2}}{(2m+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n [(n-1/2)(n-3/2+1) - 1/4] x^{n-1/2} \\ & + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+3/2} = 0 \end{aligned}$$

coef. de $x^{-1/2}$: $c_0 [-1/2 \cdot -1/2 - 1/4] = 0$

coef. de $x^{1/2}$: $a + c_1 [1/2 \cdot 1/2 - 1/4] = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

coef. de $x^{3/2}$: $c_2 [(2-1/2)(2-3/2+1) - 1/4] + c_0 = 0$

$$c_2 \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} c_0 \Rightarrow 2 c_2 = -c_0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{-c_0}{2}}$$

coef. de $x^{5/2}$: $c_3 [(3-1/2) \cdot (3-3/2+1) - 1/4] + c_1 = 0$

$$c_3 \left[\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right] = -c_1 \Rightarrow c_3 = \frac{-1}{6} c_1 \Rightarrow \boxed{c_3 = \frac{-1}{6} c_1}$$

coef. de $x^{7/2}$: $c_4 [(4-1/2)(5-3/2) - 1/4] + c_2 = 0$

$$c_4 \left[\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right] = -c_2 \Rightarrow c_4 = \frac{-1}{12} c_2 \Rightarrow \boxed{c_4 = \frac{-c_2}{12} = \frac{c_0}{24}}$$

coef. de $x^{9/2}$: $c_5 [(5-1/2)(5-1/2+1) - 1/4] + c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_5 = \frac{-c_3}{20} = \frac{c_1}{120}}$

Podemos concluir que $c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{(2m)!}$ e $c_{2m+1} = \frac{(-1)^m c_1}{(2m+1)!}$, $m=1,2,3,\dots$

Assim, $y_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m |x|^{m-1/2} = c_0 |x|^{-1/2} + c_1 |x|^{1/2} + c_2 |x|^{3/2} + c_3 |x|^{5/2} + \dots$

$$= c_0 |x|^{-1/2} + c_1 |x|^{1/2} - \frac{c_0}{2} |x|^{3/2} - \frac{1}{6} c_1 |x|^{5/2} + \frac{c_0}{24} |x|^{7/2} + \frac{c_1}{120} |x|^{9/2} + \dots$$

$$= c_0 \left[|x|^{-1/2} - \frac{1}{2} |x|^{3/2} + \frac{1}{24} |x|^{7/2} + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} |x|^{2m-1/2} + \dots \right] + c_1 \left[|x|^{1/2} - \frac{1}{6} |x|^{5/2} + \frac{1}{120} |x|^{9/2} + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} |x|^{2m+1/2} + \dots \right]$$

$$= |x|^{-1/2} \left[c_0 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} |x|^{2m} + c_1 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} |x|^{2m+1} \right]$$

③ $x^2 y'(x) - \frac{3}{4} y(x) = 0, y(1) = -1, y'(1) = r$ (Eq. de Euler)

$$y(x) = x^n, y'(x) = n x^{n-1}, y''(x) = n(n-1) x^{n-2}$$

$$n(n-1) - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow n^2 - n - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, n_2 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y(x) = C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y(1) = C_1 + C_2 = -1, y'(1) = \frac{3}{2} C_1 - \frac{1}{2} C_2 = r \Rightarrow \frac{3}{2}(-1 - C_2) - \frac{1}{2} C_2 = r$$

$$\downarrow$$

$$C_1 = -1 - C_2$$

$$-\frac{3}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_2 - \frac{3}{2} = r$$

$$3C_2 + C_2 + 3 = -2r$$

$$4C_2 = -2r - 3$$

$$C_2 = \frac{-2r-3}{4}$$

1) solução limitada, denotar $C_2 = \frac{-2r-3}{4} = 0 \Rightarrow r = -\frac{3}{2}$

④ $y''(x) + \lambda y(x) = 0, 0 < x < L, y'(0) = y(L) = 0$

$\Rightarrow$ Se $\lambda < 0$ solução que não é autovalor

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = ax + b \Rightarrow y'(0) = a = 0$$

$$\Rightarrow y(L) = a \cdot L + b = b = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

$\lambda = 0$ não é autovalor

$$\Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow y''(x) + \lambda y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$y'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow y'(0) = C_2 \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(L) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = \frac{(2m+1)\pi}{2}, m=0,1,2,\dots$$

Autovalores $\Rightarrow \lambda_m = \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4L^2}, m=0,1,2,\dots$

Autofunções $\Rightarrow y_m(x) = C_m \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right), m=0,1,2,\dots$