

Prova I- Cálculo IV

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. Respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão consideradas.

- 2,0 1. Encontre a solução do problema

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

para

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

Grafique f e, para $t = \pi/2$ e $t = \pi$, represente graficamente a solução do problema. Dê uma interpretação física para o resultado obtido.

- 3,0 2. A equação diferencial de Laguerre é dada por

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0.$$

- a. Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto singular regular desta equação. 0,2
b. Determine a equação indicial e suas raízes. 0,3
c. Encontre uma solução para o problema, considerando $x > 0$. 2,0
d. Mostre que, se $\lambda = m$ é um inteiro positivo, essa solução se reduz a um polinômio. 0,5

- 2,5 3. Encontre os autovalores e autofunções do seguinte problema de Sturm-Liouville: $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0$ em $(1, e)$, $y(1) = 0$, $y'(e) = 0$.

- 2,5 4. Encontre os coeficientes da expansão da função

$$f(x) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{se } 0 \leq x < R/2 \\ \kappa_2 & \text{se } R/2 \leq x \leq R \end{cases}$$

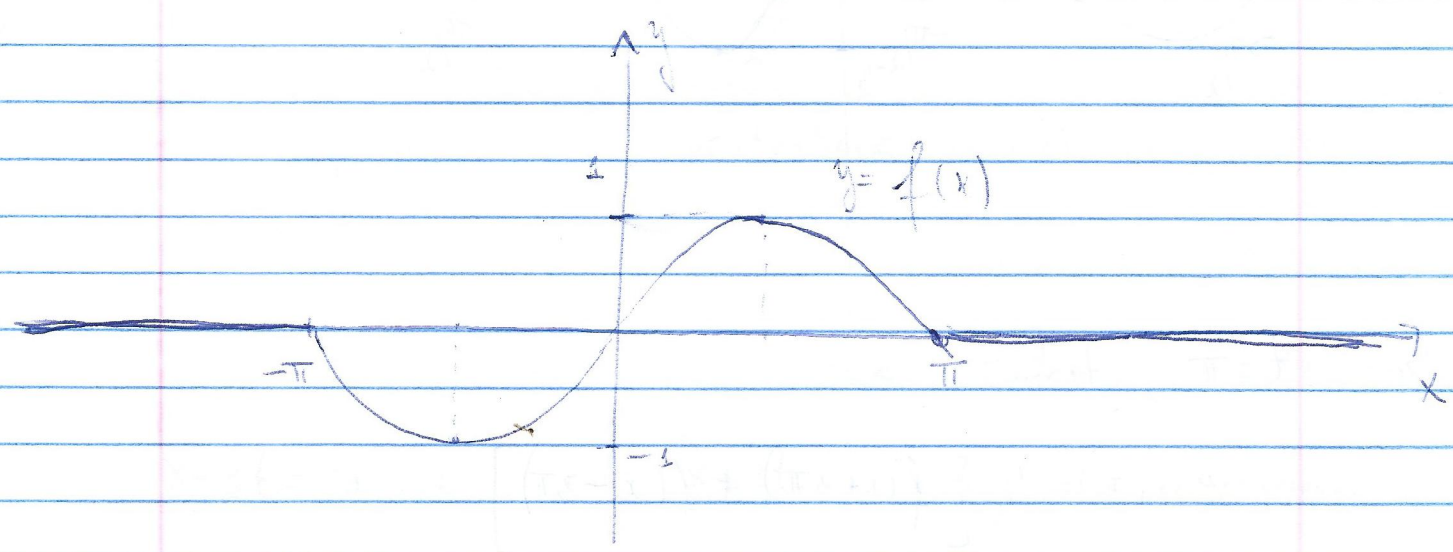
em termos do sistema ortogonal $\{J_0(\lambda_1 x), J_0(\lambda_2 x), J_0(\lambda_3 x), \dots\}$, onde $\lambda_i = \alpha_i/R$, para todo $i \in \{1, 2, \dots\}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ são as raízes de J_0 . Analise a convergência da série obtida.

① $a=2$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[f(x+3t) + f(x-3t) \right] \quad \text{onde}$$

$$f(x+3t) = \begin{cases} \sin(x+3t) & \text{se } -\pi \leq x+3t \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x+3t| > \pi \end{cases}$$

$$f(x-3t) = \begin{cases} \sin(x-3t) & \text{se } -\pi \leq x-3t \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x-3t| > \pi \end{cases}$$



se $t = \pi/2$

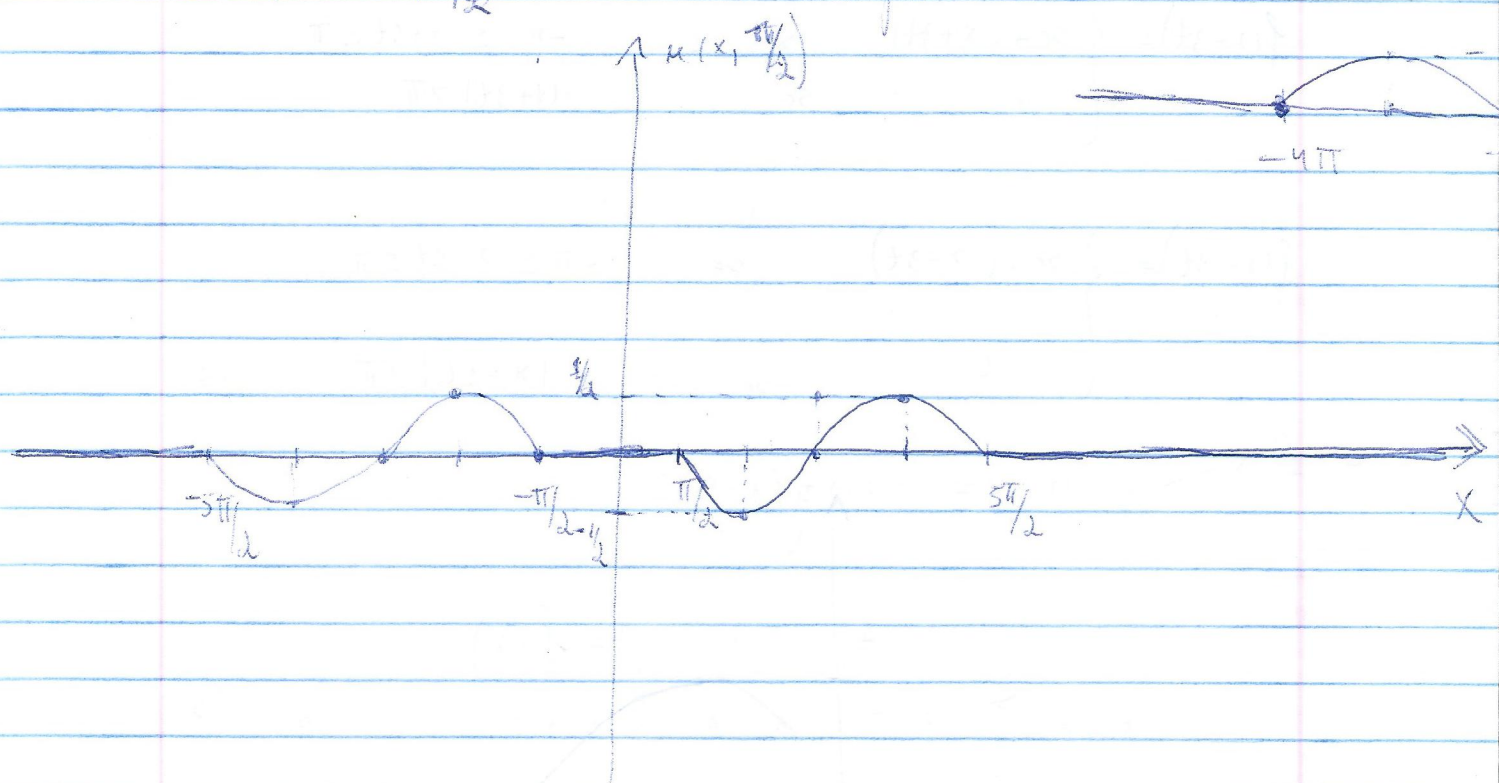
$$u(x, \pi/2) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + f\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \right] \quad \text{e}$$

$$f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) & \text{se } -5\pi/2 \leq x \leq -\pi/2 \\ 0 & \text{se } \left|x + \frac{3\pi}{2}\right| > \pi \end{cases}$$

2

$$f\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x - \frac{3\pi}{2}| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim $u(x, \frac{\pi}{2})$ tem a representação:



Se $t = \pi$, temos

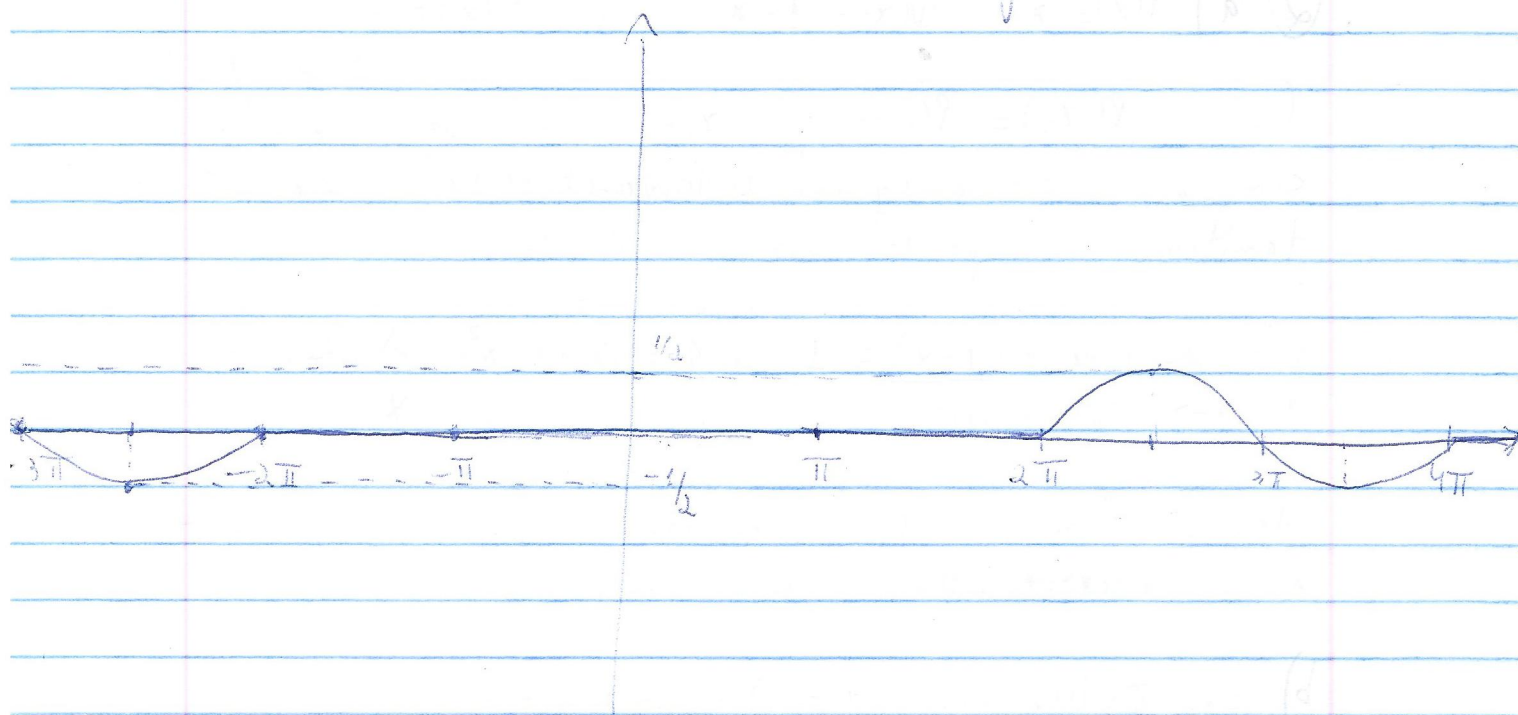
$$u(x, \pi) = \frac{1}{2} \left[f(x + 3\pi) + f(x - 3\pi) \right]$$

$$f(x + 3\pi) = \begin{cases} \sin(x + 3\pi) & \text{se } -4\pi \leq x \leq -2\pi \\ 0 & \text{se } |x + 3\pi| > \pi \end{cases}$$

$$f(x - 3\pi) = \begin{cases} \sin(x - 3\pi) & \text{se } 2\pi \leq x \leq 4\pi \\ 0 & \text{se } |x - 3\pi| > \pi \end{cases}$$

(3)

Assim $u(x, \pi)$ tem a representação



Interpretação Física: Como a corda é infinita e $u_t(x, 0) = 0$ a perturbação inicial da corda

($f(x)$ quando $t=0$) se propaga com o passar do tempo ao longo das retas características

$x - 3t = \text{constante}$ e $x + 3t = \text{constante}$ com velocidade

igual a 3. Como essas retas estão em

direções opostas temos propagação em cada uma

das direções.

4

2 a) $P(x) = x$, $Q(x) = 1-x$ e $R(x) = \lambda$.

Como $P(x_0) = P(0) = 0$, $x_0 = 0$ é um ponto singular dessa equação. Provemos que ele é também um ponto singular regular:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{P(x)} = 1, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{P(x)} = 0$$

Assim temos o resultado pois os limites acima existem.

b) Eq. Indicial: $n(n-1) + p_0 n + q_0 = 0$

$$n(n-1) + n = 0 \Rightarrow n^2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} n_1 = 0 \\ n_2 = 0 \end{matrix}$$

As raízes são $n_1 = n_2 = 0$

c) Propomos $y(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^{m+n_1} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$

Então: $y'(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1}$ e $y''(x) = \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$

Substituindo na equação tem-se:

$$\sum_{m \geq 2} m(m-1) a_m x^{m-2} + \sum_{m \geq 1} m a_m x^{m-1} - \sum_{m \geq 1} m a_m x^m + \lambda \sum_{m \geq 0} a_m x^m = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} m(m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{m \geq 0} (m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{m \geq 1} m a_m x^m \\ + \lambda \sum_{m \geq 0} a_m x^m = 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\sum_{m \geq 1} [m(m+1)q_{m+1} + (m+1)q_{m+1} - mq_m + \lambda q_m] x^m + q_1 + \lambda q_0 = 0$$

$$\sum_{m \geq 1} [(m+1)^2 q_{m+1} - q_m(-\lambda+m)] x^m + q_1 + \lambda q_0 = 0$$

Assim devemos ter $q_1 + \lambda q_0 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = -\lambda q_0}$

Para $m \geq 1$, $q_{m+1} = \frac{q_m(m-\lambda)}{(m+1)^2}$, ou seja,

$$q_2 = \frac{q_1(1-\lambda)}{2^2} = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2^2} q_0$$

$$q_3 = \frac{q_2(2-\lambda)}{3^2} = \frac{-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2} q_0$$

$$q_4 = \frac{q_3(3-\lambda)}{4^2} = \frac{-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} q_0$$

Generalizando temos:

$$\boxed{q_m = \frac{-\lambda(1-\lambda) \dots (m-1-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2 \dots (m-1)^2 m^2} q_0}$$

E portanto:

$$y(x) = q_0 - \lambda q_0 x - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\lambda(1-\lambda) \dots (m-1-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2 \dots m^2} q_0 \cdot x^m$$

$$y(x) = q_0 \left[1 - \lambda x - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\lambda(1-\lambda) \dots (m-1-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2 \dots m^2} x^m \right]$$

6

d) Suponha que $\lambda = k$, k inteiro positivo. Então $\lambda - k = 0$ e temos

$$y(x) = a_0 \left[1 - \lambda x - \frac{\lambda(1-\lambda)x^2}{2^2} - \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)x^3}{2^2 \cdot 3^2} - \dots - \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\dots(k-1-\lambda)x^k}{2^2 \cdot 3^2 \dots k^2} - \frac{\lambda(1-\lambda)\dots(k-1-\lambda)x^{k+1}}{2^2 \cdot 3^2 \dots k^2} - \frac{\lambda(1-\lambda)\dots(k+1-\lambda)x^{k+2}}{2^2 \cdot 3^2 \dots (k+1)^2} + \dots \right]$$

$$= a_0 \left[1 - \lambda x - \frac{\lambda(1-\lambda)x^2}{2^2} - \dots - \frac{\lambda(1-\lambda)\dots(k-1-\lambda)x^k}{2^2 \cdot 3^2 \dots k^2} \right]$$

que é um polinômio.

3) $x y'' + y' + \lambda x^{-1} y = 0$ ou multiplicando por x :

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + x y' + \lambda y = 0 & \text{em } (1, e) \\ y(1) = 0, \quad y'(e) = 0 \end{cases}$$

• Se $\lambda = 0$, temos

$$x^2 y''(x) + x y'(x) = 0$$

Propomos $y(x) = x^n$ então $y'(x) = n x^{n-1}$ e $y''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

substituindo temos

$$n(n-1)x^n + n x^n = 0 \Rightarrow n^2 - n + n = 0 \Rightarrow n_1 = n_2 = 0$$

A solução nesse caso é $y(x) = c_1 \cdot x^0 + c_2 x^0 \ln(x)$

$$y(1) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$y'(x) = \frac{C_2}{x} \Rightarrow y'(e) = \frac{C_2}{e} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

Nesse caso temos apenas a solução trivial!

• Se $\lambda < 0$ temos, fazendo $y(x) = x^n$, considerando $\lambda = -k^2$, $k > 0$,
 $n(n-1) + n + \lambda = 0 \Rightarrow n^2 + \lambda = 0 \Rightarrow n_1 = k \text{ e } n_2 = -k$

A solução é da forma:

$$y(x) = C_1 x^k + C_2 x^{-k}$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y'(x) = C_1 k x^{k-1} - C_2 k x^{-k-1} \Rightarrow y'(e) = C_1 k e^{k-1} - C_2 k e^{-k-1} = 0$$

$$\text{Assim } k [-C_2 e^{k-1} - C_2 e^{-k-1}] = 0 \Rightarrow -C_2 k [e^{k-1} + e^{-k-1}] = 0$$

$$C_2 k e^{-1} [e^k + e^{-k}] = 0 \Rightarrow 2 C_2 k e^{-1} \cosh(e^k) = 0$$

Como $\cosh k \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$, temos $\boxed{C_2 = 0}$

E portanto $\boxed{C_1 = 0}$.

• Se $\lambda > 0$, $\lambda = +k^2$, $k > 0$. Temos, fazendo, $y(x) = x^n$,

$$n(n-1) + n + k^2 = 0 \Rightarrow n^2 + k^2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} n_1 = ki \\ n_2 = -ki \end{matrix}$$

$$y(x) = C_1 \cos(k \ln(x)) + C_2 \sin(k \ln(x))$$

8

$$y(1)=0 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$$

$$y'(x) = -C_2 K \cos(K \ln x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y'(1) = \frac{-C_2 K}{1} \cos(K) = 0$$

$$\cos(K)=0 \Rightarrow K = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

Autovalores: $\lambda = K^2 \Rightarrow \lambda_m = \left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}$

Autofunções: $y_m(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) \ln(x)\right), \quad m \in \mathbb{N}$

④ $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m J_0(\lambda_m x)$

$$\int_0^R x J_0(\lambda_m x) f(x) dx = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \int_0^R x J_0(\lambda_m x) J_0(\lambda_m x) dx$$

$$a_m = \frac{\int_0^R x J_0(\lambda_m x) f(x) dx}{\int_0^R J_0^2(\lambda_m x) x dx}$$

A série converge para

$$\begin{cases} K_1 & \text{se } 0 < x < R/2 \\ K_2 & \text{se } R/2 < x < R \\ \frac{K_1 + K_2}{2} & \text{se } x=0, x=R/2 \text{ ou } x=R \end{cases}$$

$$\int_0^R J_0^2\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) x dx \quad u = \frac{x}{R}, \quad dx = R du, \quad R \int_0^1 u J_0^2(\alpha_m u) du = \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_m)$$

$$\int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) f(x) dx = K_1 \int_0^{R/2} x J_0\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) dx + K_2 \int_{R/2}^R x J_0\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) dx$$

Mas $[u J_1(u)]' = u J_0(u)$, logo

$$\int_0^{R/2} x J_0\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) dx = \int_{\alpha_m}^{\alpha_m/2} \frac{R u J_0(u)}{\alpha_m} R du = \frac{R^2}{\alpha_m^2} \int_{\alpha_m}^{\alpha_m/2} u J_0(u) du = \frac{R^2}{\alpha_m^2} \left[\frac{\alpha_m}{2} J_1\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) - \frac{\alpha_m}{2} J_1(\alpha_m) \right]$$

$$\int_{R/2}^R x J_0\left(\frac{\alpha_m x}{R}\right) dx = \int_{\alpha_m/2}^{\alpha_m} \frac{R^2}{\alpha_m^2} u J_0(u) du = \frac{R^2}{\alpha_m^2} \left[\frac{\alpha_m}{2} J_1(\alpha_m) - \frac{\alpha_m}{2} J_1\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) \right]$$

Portanto $a_m = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\alpha_m)} \left[K_1 \frac{R^2}{\alpha_m^2} \left(\frac{\alpha_m}{2} J_1\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) \right) + K_2 \frac{R^2}{\alpha_m^2} \left(\frac{\alpha_m}{2} J_1(\alpha_m) - \frac{\alpha_m}{2} J_1\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) \right) \right]$