

Cálculo IV- Prova 1-2012/01

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Questões sem justificativa e/ou cálculos não serão consideradas.**

1. Encontre as soluções em $\mathbb{C}$ de cada equação abaixo:

a. $z^5 + 1 + i = 0$.

b. $e^{i\bar{z}} = i$

2. Sejam a e b dois números complexos não nulos tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se $z, w \in \mathbb{C}$ satisfazem o sistema

$$\bar{z}w + z\bar{w} = 6a,$$

$$\bar{z}w - z\bar{w} = 8b,$$

determine o valor de $|a|$ de forma tal que $|zw| = 1$.

3. Seja C a semi-circunferência com centro na origem, raio igual a $R > 0$ e localizada no terceiro e quarto quadrantes do plano complexo. Quando aplicamos a função $f(z) = \text{Log}(iz)$ nos pontos de C obtemos como imagem qual região do plano complexo? Justifique sua resposta.

4. Seja $f(z) = (Re(z) + Im(\bar{z}))\bar{z}$. Determine onde $f'(z)$ existe e encontre $f'(z)$ para estes valores. Verifique se existe alguma região aberta A onde f é holomorfa.

5. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z-1}{\bar{z}-1} dz$, onde γ é a circunferência de raio igual a 1, centrada em $z_0 = 1$ e orientada no sentido anti-horário.

Fórmulas:

- Eq. de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, u_y = -v_x$
- $f'(x + iy) = u_x(x, y) + v_x(x, y)i$
- $w^{1/n} = |w|^{1/n}(\cos(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n})), k = 0, 1, \dots, n-1$
- $\exp(z) = e^x(\cos y + i \sen y), \text{Log}(z) = \ln|z| + \text{arg}_0(z)i$

Resolução Prova I - Cálculo IV - 2012/01

1) a) $z = -1 - i \Rightarrow w = -1 - i$, $|w| = \sqrt{2}$, $\arg w = \frac{5\pi}{4}$

$$z_k = (\sqrt{2})^{1/5} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi/4 + k \cdot 2\pi}{5} \right) = 2^{1/10} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi/4 + 2\pi \cdot k}{5} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

b) $e^{i\bar{z}} = e^{i(x-yi)} = e^{y+ix} = e^y (\cos(x) + i \sin(x)) = i$

$$e^y \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

$$e^y \sin(x) = 1$$

$$\Rightarrow e^y \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = e^y \cdot (-1)^m = 1 \Rightarrow \text{Só tem solução}$$

para m par e $y = 0$.

Logo as soluções do problema são da forma $z = \frac{(2m+1)\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

2) Observe que $\overline{6a} = 6 \cdot \overline{a} = \overline{zw + z\bar{w}} = \overline{z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w} = 6a$
 Logo $a = \overline{a}$. Também $\overline{8b} = 8 \cdot \overline{b} = \overline{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w} = -8b$
 Logo $b = -\overline{b}$.

Somando as equações temos

$$2\bar{z}w = 6a + 8b \Rightarrow \bar{z} \cdot w = 3a + 4b$$

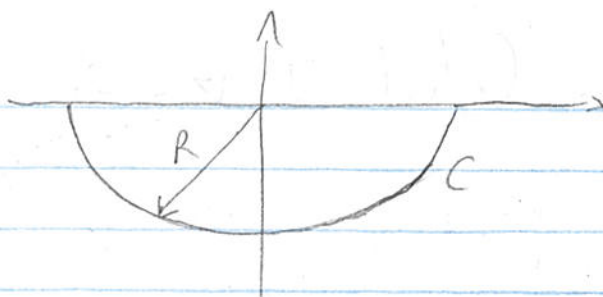
Assim $\overline{\bar{z} \cdot w} = z \cdot \bar{w} = 3\bar{a} + 4\bar{b} = 3a - 4b$.

Como $|z \cdot w| = 1$, temos $(z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = 1$,
 ou $(\bar{z} \cdot w) \cdot (z \cdot \bar{w}) = 1$ e nos dá

$$(3a + 4b) \cdot (3a - 4b) = 1 \Rightarrow 9a^2 - 16b^2 = 1$$

Como $b^2 = -a^2$ temos $9a^2 + 16a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow |a| = \frac{1}{5}$.

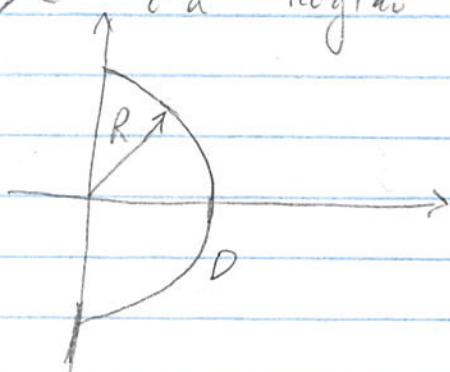
3



Quando multiplicamos i pelo nº complexo $z = R e^{i\theta}$, ob-
temos,

$$iz = R i e^{i\theta} = R e^{i\pi/2} \cdot e^{i\theta} = R e^{i(\theta + \pi/2)}$$

Ou seja, a imagem de C pela transformação
 $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a região D abaixo:

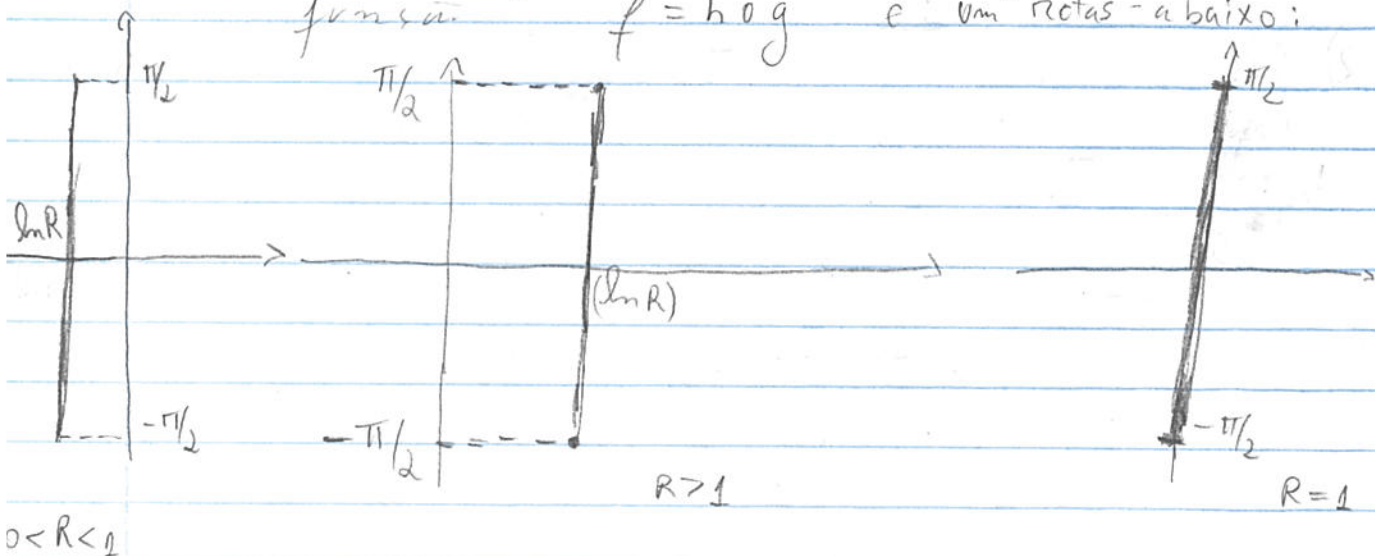


Cada ponto $z \in D$ é
da forma
 $z = R e^{i\theta}$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

Aplicando $h(z) = \text{Log}(z)$ aos pontos da região
 D obtemos

$$h(z) = \text{Log}(R e^{i\theta}) = \ln R + \arg z \cdot i, \quad -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$$

Assim a imagem de C pela
função $f = h \circ g$ é um retas - abaixo:



$$\textcircled{4} \quad f(z) = (\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(\bar{z})) \bar{z} = (\operatorname{Re}(x+iy) + i \operatorname{Im}(x-yi)) (x-yi) \\ = (x-y) (x-yi) = (x-y)x - y(x-y)i$$

$$u(x,y) = x^2 - yx, \quad v(x,y) = -yx + y^2$$

$$u_x(x,y) = 2x - y, \quad v_x(x,y) = -y, \quad u_y(x,y) = -x, \quad v_y(x,y) = -x + 2y$$

u, v, u_x, v_x, u_y, v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$.

Para que $u_x = v_y, u_y = -v_x$ devam ter

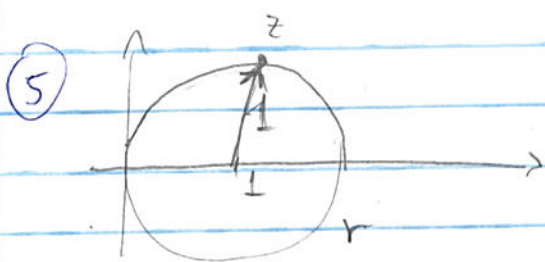
$$2x - y = -x + 2y, \quad -x = y$$

$$2x + x = -x - 2x \Rightarrow 3x = -3x \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Assim, $\boxed{y=0}$.

As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas para o ponto $z_0 = 0 + 0i$. Logo

$f'(0+0i) = u_x(0,0) + v_x(0,0)i = 0 + 0i$. e $f'(z)$ não existe se $z \neq 0+0i$. Portanto, f não é holomorfa em nenhuma região aberta $U \subset \mathbb{C}$ já que o ponto $(0,0)$ não constitui uma região aberta no plano.



Se $z \in r$ temos

$$|z-1|=1 \quad \text{e portanto}$$

$$z-1 = e^{i\theta} \Rightarrow z = 1 + e^{i\theta}$$

Logo r pode ser parametrizada por

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(0) = 1 + e^{i0}, \quad \gamma'(0) = i e^{i0}$$

Assim

$$\int_{\gamma} \frac{z-1}{\bar{z}-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^{i\theta})-1}{(\overline{1+e^{i\theta}})-1} \cdot i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}-1} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{e^{-i\theta}-1} d\theta$$

$$= \frac{i}{3i} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left[e^{6\pi i} - e^0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} [1-1] = 0.$$