

Prova I - Cálculo E - 2013/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa.** Soluções sem justificativa e/ou cálculos, bem como baseadas somente no comportamento numérico de alguns termos da série, não serão aceitas.

1. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente.

1,5 a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

1,5 b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

2. Considere a função $f(x) = x^2 \arctan(x^4)$.

1,5 a. Encontre uma representação em série de potências para f para $-1 < x < 1$.

1,5 b. Usando (a), estime o valor de $\int_0^{1/3} f(x) dx$ com precisão de 10^{-4} e justifique o porquê de sua aproximação ter essa precisão.

3. Encontre a solução geral da equação diferencial de segunda ordem

2,5
$$y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0,$$

na forma de série de potências. (Obs.: Somente serão consideradas respostas que apresentem o termo geral da série).

4. Estimar o erro ao utilizarmos a aproximação

1,5
$$e^{x^2} \approx 1 + x^2$$

para $|x| \leq 1$.

Fórmulas:

Série de Taylor: $f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Desigualdade de Taylor: $|r_n(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, $|f^{n+1}(\xi)| \leq M$ quando $\xi \in [x - x_0, x + x_0]$

Série Geométrica: $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ para $|r| < 1$

$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Teste da razão: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, Teste da raiz: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Erro na aproximação da série alternada: $|s - s_n| \leq b_{n+1}$

Prova I - Cálculo E - 2013/01

1) a) Teste da razão:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{2}{n+1}$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \right]^2 \cdot \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} \right]$$

$$= 1 \cdot 0 = 0 < 1$$

A série converge absolutamente.

b) Seja $b_n = \frac{\ln(n)}{n}$, então $b_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e $b_n = f(n)$, com $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \text{ se}$$

$\ln(x) > 1$, ou seja, se $x > e$.

Logo $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n=3}^{+\infty}$ é decrescente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$,

pelo teste de Leibniz, a série converge.

Por outro lado, $\left| (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \right| = \frac{\ln n}{n} \in$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x)) \Big|_3^t,$$

$$= +\infty$$

pelos teste da integral, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge. Assim,

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ é condicionalmente convergente.

(2) a) Seja $g(t) = \arctg(t)$, então

$$\arctg(t) = \int \frac{dx}{1+t^2} = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n dx \text{ para } |t| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \text{const.}$$

Para $x=0$ temos $\arctg(0) = 0 + \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = 0$

Colocando $t = x^4$ com $|x| < 1$ temos

$$\arctg(x^4) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{2n+1}, \text{ logo}$$

$$x^2 \arctg(x^4) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+6}}{2n+1} \text{ para } |x| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{1/3} f(x) dx &= \int_0^{1/3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+6}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+7}}{(8n+7)(2n+1)} \Big|_0^{1/3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8n+7} \cdot \frac{1}{(8n+7)} \cdot \frac{1}{(2n+1)} \end{aligned}$$

Queremos $|S_n - s| \leq b_{n+1} < 10^{-4}$, ou seja,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+15} \cdot \frac{1}{(n+15)} \cdot \frac{1}{(2n+3)} < 10^{-4}$$

Para $n=0$ tem-se $\left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3} < 10^{-4}$

Logo $\int_0^{1/3} f(x) dx \approx \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{7}$ com precisão de 10^{-4} .

3) Propondo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem-se $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ e $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$. Logo:

$$\sum_{n \geq 2} c_n n(n-1) x^{n-2} - 2 \sum_{n \geq 1} c_n n x^n + \sum_{n \geq 0} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n \geq 0} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - 2 \sum_{n \geq 1} c_n n x^n + \sum_{n \geq 0} c_n x^n = 0$$

$$c_2 \cdot 2 + c_0 + \sum_{n \geq 1} [c_{n+2} (n+2)(n+1) - 2c_n \cdot n + c_n] x^n = 0$$

$$2c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2}$$

$$c_{n+2} = \frac{(2n-1)c_n}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow c_{2n} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{(2n)!} c_0$$

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} c_1$$

Solução:

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{3 \cdot 7 \dots (4m-5)}{(2m)!} x^{2m} \right) + \left(x + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4m-3)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right)$$

④ $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 2x e^{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2 e^{x^2} = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = (4x)e^{x^2} + (8x)e^{x^2} + (4x^2) \cdot 2x e^{x^2} \Rightarrow f'''(0) = 0$

$$T_3(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{2x^2}{2} + \frac{0 \cdot x^3}{3!}$$

O erro pode ser estimado por

$$|R_3(x)| \leq M \cdot \frac{|x|^4}{4!} \leq \frac{M}{4!} \text{ pois } |x| \leq 1$$

Cálculo de M:

$$f'''(x) = 12x e^{x^2} + 8x^3 e^{x^2} = 4x e^{x^2} [3 + 2x^2]$$

$$f^{(4)}(x) = 12e^{x^2} + 24x^2 e^{x^2} + 24x^2 e^{x^2} + 16x^4 e^{x^2}$$

$$\Rightarrow |f^{(4)}(x)| \leq (12 + 24 + 24 + 16) \cdot e \text{ pois } |x| \leq 1$$

$$= 76e$$

Assim

$$|R_3(x)| \leq \frac{76e}{24} = \frac{38e}{12} = \frac{19e}{6}$$