

Prova I - Cálculo IV -MTM5118- 01/2014

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa, respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão aceitas.**

1. Prove, *usando a definição de convergência de sequências*, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + 3n^2 + n - 1}{n^3 + 4n + 2} = 5.$$

2. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n^3 + 2}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{8n+5}$

c. $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} + \dots$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

3. a. Estime o erro cometido ao usarmos a soma parcial s_{10} como uma aproximação para a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

- b. Usando $n = 10$ obtenha uma estimativa melhorada para a soma da série.

- c. Encontre um valor de n de forma que s_n represente a soma da série com precisão de 10^{-5} .

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: $f_n(x) = 1/x$ se $x \in [n, n+1[$ e $f_n(x) = 0$ caso contrário. Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

e verifique se a convergência é ou não uniforme.

Resolução P1 - MTM 5118 - 01/2014

① Temos de provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{5n^3 + 3n^2 + n - 1}{n^3 + 4n + 2} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{5n^3 + 3n^2 + n - 1}{n^3 + 4n + 2} - 5 \right| = \left| \frac{5n^3 + 3n^2 + n - 1 - 5n^3 - 20n - 10}{n^3 + 4n + 2} \right|$$

$$= \left| \frac{3n^2 - 19n - 11}{n^3 + 4n + 2} \right| \leq \left| \frac{3n^2}{n^3 + 4n + 2} \right| + \left| \frac{-19n}{n^3 + 4n + 2} \right| + \left| \frac{-11}{n^3 + 4n + 2} \right|$$

Ou seja,

$$\left| \frac{5n^3 + 3n^2 + n - 1}{n^3 + 4n + 2} - 5 \right| \leq \frac{3n^2}{n^3 + 4n + 2} + \frac{19n}{n^3 + 4n + 2} + \frac{11}{n^3 + 4n + 2}$$

$$< \frac{3n^2}{n^3} + \frac{19n}{n^3} + \frac{11}{n^3} = \frac{3}{n} + \frac{19}{n^2} + \frac{11}{n^3}$$

$$< \frac{3}{n} + \frac{19}{n} + \frac{11}{n} \quad \text{se } n \geq 2$$

$$= \frac{33}{n} \quad \text{se } n \geq 2$$

Portanto escolha $N = \max \left\{ 2, \frac{33}{\varepsilon} \right\}$.

Se $n > N$ temos $n > 2$ e $n > N = \frac{33}{\varepsilon}$

Ou seja, $n > 2$ e $\frac{33}{n} < \varepsilon$, o que prova o resultado.

2) a) Como $|\cos(\sqrt{m})| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\left| \frac{\cos \sqrt{m}}{\sqrt{m^3+2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{m^3+2}} < \frac{1}{\sqrt{m^3}} = \frac{1}{m^{3/2}}$$

A série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{3/2}}$ é convergente pois é

a p -série com $p > 1$, logo pelo teste da comparação $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\cos \sqrt{m}}{\sqrt{m^3+2}} \right|$ converge e a série dada é absolutamente convergente.

b) Seja $b_m = \frac{\sqrt{m+1}}{8m+5}$, então $b_m > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m+1}}{8m+5} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m} \sqrt{1+\frac{1}{m}}}{m(8+\frac{5}{m})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{8+\frac{5}{n}} = 0 \cdot 8 = 0.$$

Considere $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{8x+5}, \text{ então}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (8x+5) - 8 \cdot \sqrt{x+1}}{(8x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x+5-16 \cdot (x+1)}{2\sqrt{x+1}(8x+5)^2} = \frac{-8x-11}{2\sqrt{x+1}(8x+5)^2} < 0$$

para $x > 0$, logo f é decrescente e o

mesmo vale para $\{b_m\}_{m=1}^{+\infty}$. Pelo Teste de Leibniz, a série converge.

Por outro lado, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m+1}}{8m+5}$ diverge, pois

$$\frac{\sqrt{m+1}}{8m+5} > \frac{\sqrt{m+1}}{8m+8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{m+1}} > \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{m+m}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$$

e $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$ é divergente (p-série com $p < 1$)

Portanto, a série converge condicionalmente.

c) Pelo teste da razão, com $a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!}$,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}{(n+1)!} \bigg/ \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)}{(n+1)!} \cdot n! = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{n!}{n!} = 2.$$

A série diverge

d) Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, existe $N \in \mathbb{R}$

tal que $n > N$, $\ln(x) > e^2$. Portanto,

se $n > N$, $\ln(n) > e^2$ e $[\ln(n)]^{\ln(n)} > (e^2)^{\ln(n)}$.

Ou seja, para $n > N$, $[\ln(n)]^{\ln(n)} > e^{\ln n^2} = n^2$

$$\text{e } \frac{1}{(\ln n)^{\ln(n)}} < \frac{1}{n^2} \quad \left(\text{como } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)$$

é convergente, a série converge absolutamente.

3) a) A função $f(x) = \frac{1}{x^4}$ é contínua, decrescente e positiva para $x \geq 1$, logo podemos usar a estimativa

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx \leq S - S_{10} \leq \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$$

Como,

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C, \text{ temos}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} \right] = \frac{1}{3 \cdot 1^3}$$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3 \cdot 10^3}$$

Logo

$$\frac{1}{3 \cdot 11^3} \leq S - S_{10} \leq \frac{1}{3 \cdot 10^3}$$

Queremos

$$S - S_m \leq \int_m^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3 \cdot m^3} < 10^{-5}, \text{ então basta}$$

escolharmos $m^3 > \frac{10^5}{3}$, ou seja, $m > 10 \sqrt[3]{\frac{100}{3}}$

b) Como $\frac{1}{3 \cdot 11^3} \leq S - S_{10} \leq \frac{1}{3 \cdot 10^3}$
 temos

$$\frac{1}{3 \cdot 11} + S_{10} \leq S \leq S_{10} + \frac{1}{3 \cdot 10^3}$$

Se escolhermos

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{3 \cdot 11^3} + 2S_{10}}{2}, \text{ o erro}$$

será menor ou igual a

$$\frac{\frac{1}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{3 \cdot 11^3}}{2}$$

4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in [m, m+1] \\ 0 & \text{se } x \notin [m, m+1] \end{cases}$$

Dado qualquer $x \geq 1$, existe um único $m^* \in \mathbb{N}$

tal que $m^* \leq x < m^* + 1$, isso significa

que $f_{m^*}(x) = \frac{1}{x}$ e $f_m(x) = 0$ se $m \neq m^*$.

Logo $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) = f_{m^*}(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \geq 1$.

Seja $S(x) = \frac{1}{x}$ a soma da série.

Note que $S_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x) = 0$ se

$1 \leq m < m^*$ e $S_m(x) = \frac{1}{x}$ se $m \geq m^*$. Logo

$$M_m = \sup_{x \geq 1} |S_m(x) - S(x)| = \begin{cases} \sup_{x \geq 1} \left| 0 - \frac{1}{x} \right| & \text{se } m < m^* \\ \sup_{x \geq 1} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| = 0 & \text{se } m \geq m^* \end{cases}$$

Logo $\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = 0$ e a convergência é

uniforme.